Journal

104065

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 122.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1900.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 122.

Seite

Appell, P. Sur une forme générale des équations de la dynamique et sur le principe de ***Gauss*** . . . . . 205—208

Busche, E. Ueber eine reale Darstellung der imaginären Gebilde einer reellen Ebene und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie . 227—262

Dingeldey, F. Ueber die Discriminante einer gewissen quadratischen Gleichung und die Bedingungen für den Kreis bei allgemeinen projectiven Coordinaten . . . . . 186—197

Grünfeld, E. Zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung *n*-ter Ordnung adjungirten Differentialgleichungen . . . . . 43— 52

— — Bemerkung zu der Arbeit S. 43—52 dieses Bandes 88

Guldberg, Alf. Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen . . . . . 34— 38

Hamburger, M. Ueber die singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit *n* abhängigen Variablen . . . . 322—354

Hancock, Harris. On the reduction of ***Kronecker***'s modular systems whose elements are functions of two und three variables . . . . . 265—298

Heffter, Lothar. Ueber reductible lineare Differentialgleichungen . . . 39— 42

Hermes, O. Die Formen der Vielflache. (Hierzu Tafel I u. II.) . . . . . 124—154

Heymann, W. Ueber Differential- und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe von ***Gauss*** integrirt werden können . . . 164—171

Horn, J. Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle 73— 83

Loewy, Alfred. Ueber Scharen reeller quadratischer und ***Hermite***scher Formen . . . . . 53— 72

Müller, E. Ein Satz über Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie der Ebene . . . . . 30— 33

Seite

Muth, P. Ueber die Elementartheiler componirter Systeme . . . . . 84— 87

— — Ueber alternirende Formen . . . . . 89— 96

Nanson. On certain determinant theorems . . . . . 179—185

Schafheitlin, Paul. Die Nullstellen der *Bessel*schen Functionen . . . . 299—321

Sterba, Josef. Ueber eine *Jacobi*sche Gleichung . . . . . 198—204

Sturm, Rudolf. Ueber die *Jacobi*sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades . . . . . 263—264

Teixeira, F. Gomes. Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée . . . . . 97—123

Thomé, L. W. Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten . . . . . 1— 29

Timerding, H. E. Ueber die Reduction einer quadratischen Function . . 172—178

— — Ueber die Gruppirungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung . . . . . 209—226

Wallenberg, Georg. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . . 155—163

Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

(Mit Rückblick auf die gesammten von dem Verfasser in diesem Journal veröffentlichten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Die vorliegende Abhandlung behandelt in No. 1 den homogenen linearen Differentialausdruck, der in den Coefficienten rational nebst der unabhängigen Variablen eine irreductibele algebraische Function enthält. Es wird der Begriff eines in dem Bereiche dieser algebraischen Function normalen Differentialausdruckes aufgestellt und ein System solcher Differentialausdrücke in Betracht gezogen. Hierbei ergeben sich Sätze, welche solchen über Systeme von Differentialausdrücken mit rationalen Functionen der unabhängigen Variablen als Coefficienten, die als normale Differentialausdrücke bezeichnet sind (vergl. die Abhandlung des Verfassers Bd. 96 dieses Journals), entsprechen. Sodann wird folgender Zusammenhang nachgewiesen. Wenn man aus einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten rational nebst der unabhängigen Variablen eine irreductibele algebraische Function derselben enthalten, diejenige homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten herleitet, deren Integrale die linearunabhängigen Integrale jener Differentialgleichung sind — die hergeleitete Differentialgleichung ist die Connexdifferentialgleichung der ursprünglichen Differentialgleichung genannt worden — und wenn der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt werden kann, so ist der Differentialausdruck der ursprünglichen Differentialgleichung durch ein System im Bereiche der irreductibelen algebraischen Function normaler Differentialausdrücke darstellbar und umgekehrt. Die Integration der homogenen

linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten war für den Fall, dass der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, in der Abhandlung des Verfassers Bd. 121 vermittelst der Integration der Connexdifferentialgleichung bewerkstelligt worden. Jetzt ist dem vorhin angegebenen Zusammenhange entsprechend zunächst der ursprüngliche Differentialausdruck zu prüfen, bevor das weitere Verfahren angewandt wird.

In No. 2 werden Untersuchungen über die Beziehung zwischen einer ursprünglichen homogenen linearen Differentialgleichung und einer solchen angestellt, deren Integral durch eine homogene lineare Verbindung des Integrales der ursprünglichen Differentialgleichung und seiner Ableitungen mit Coefficienten, die gegebene Functionen der unabhängigen Variablen sind, ausgedrückt wird.

Alsdann ist in No. 3 im Anschluss an die Uebersicht, die in Bd. 96 dieses Journals über die bis dahin von dem Verfasser erschienenen Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen gegeben ist, ein Rückblick auf die gesammten von dem Verfasser in diesem Journal veröffentlichten Arbeiten über lineare Differentialgleichungen mit ein- oder mehrwerthigen algebraischen Coefficienten enthalten.

1.

Definition eines im Bereiche einer algebraischen Function normalen Differentialausdruckes; Systeme von solchen Differentialausdrücken; Zusammenhang eines solchen Systems mit dem Differentialausdrucke der entsprechenden Connexdifferentialgleichung.

Es werden homogene lineare Differentialausdrücke betrachtet, deren Coefficienten rational die unabhängige Variable x und eine irreductibele algebraische Function s von x, die auch fehlen kann, enthalten. Der Coefficient der höchsten Ableitung der abhängigen Variablen y oder $y_1, \ldots, y'$ wird immer gleich 1 angenommen. In der Gleichung von s mit ganzen rationalen Functionen von x als Coefficienten wird der Coefficient der höchsten Potenz gleich 1 vorausgesetzt.

I.

A) Ein solcher Differentialausdruck m-ter Ordnung sei $\Phi_m(y, s, x)$, ein anderer n-ter Ordnung $\Psi_n(y, s, x)$. Wenn die Integrale von $\Phi_m(y, s, x) = 0$ und $\Psi_n(y, s, x) = 0$ bei einem Zweige von s linearunabhängig sind, so sind dieselben Integrale bei jedem Zweige von s linearunabhängig. Diese Inte-

grale werden in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n)$-ter Ordnung mit in x und s rationalen Coefficienten vereinigt in derselben Weise wie bei rationalen Functionen von x als Coefficienten nach Abh. Bd. 96 No. 7 I, wobei die Differentialquotienten von s vermittelst der Gleichung von s rational durch x und s ausgedrückt werden.

B) Wenn die Differentialgleichungen $\Phi_m(y, s, x) = 0$ und $\Psi_n(y, s, x) = 0$ bei einem Zweige von s k und nicht mehr linearunabhängige Integrale gemeinsam haben, so sind diese Integrale bei jedem Zweige von s die k gemeinsamen linearunabhängigen Integrale. Dieselben erfüllen eine homogene lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung, deren Coefficienten rational x und s enthalten, $F_k(y, s, x) = 0$, wo $F_k(y, s, x)$ auf dieselbe Weise aus Φ_m und Ψ_n hergeleitet wird, wie bei rationalen Functionen von x als Coefficienten nach Abh. Bd. 96 No. 7 II.

C) Der homogene lineare Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$, dessen Coefficienten x und s rational enthalten, wobei s auch fehlen kann (vgl. III., IV.), sei durch ein System

$$\varphi(y, s, x) = y_1, \quad \psi(y_1, s, x) \tag{1.}$$

darstellbar, worin φ und ψ homogene lineare Differentialausdrücke höherer als nullter Ordnung sind mit in x und s rationalen Coefficienten, wobei s auch fehlen darf, so heisse der Ausdruck $F_m(y, s, x)$ *in dem Bereiche s zerlegbar;* demnach wenn $F_m(y, s, x)$ nicht durch ein System wie (1.) darstellbar ist, so heisse der Ausdruck $F_m(y, s, x)$ *in dem Bereiche s unzerlegbar.*

Die Integrale von $\Phi_m(y, s, x) = 0$ und $\Psi_n(y, s, x) = 0$ seien linearunabhängig und nach A) vereinigt in der Differentialgleichung

$$\Phi_m(y, s, x) = y_1, \quad \psi_n(y_1, s, x) = 0, \tag{2.}$$

wo ψ_n ein homogener linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung mit in x und s rationalen Coefficienten. Es ergiebt sich nun durch dieselbe Betrachtung wie bei rationalen Functionen von x als Coefficienten nach Abh. Bd. 96 No. 7 III: Ist Ψ_n im Bereiche s unzerlegbar, so auch ψ_n und ist Ψ_n im Bereiche s zerlegbar, so auch ψ_n.

II.

A) Ein homogener linearer Differentialausdruck, der x und s rational in den Coefficienten enthält, und bei jedem Punkte x regulär ist gemäss der in Abh. Bd. 115 No. 5 aufgestellten Definition, heisse *in dem Bereiche s*

regulär. Hierbei darf s auch in den Coefficienten des Differentialausdruckes fehlen; ein homogener linearer Differentialausdruck, der rationale Functionen von x als Coefficienten hat, und regulär ist (Abh. Bd. 96 No. 5), ist zugleich in dem Bereiche s regulär. Ein in dem Bereiche s regulärer Differentialausdruck m-ter Ordnung sei durch $\bar{F}_m(\bar{y}, s, x)$ bezeichnet. W sei eine rationale Function von x, welche in Partialbrüche zerlegt zum absoluten Gliede Null hat, $e^W = \Omega$. Der Differentialausdruck $\Omega \bar{F}_m(\Omega^{-1}y, s, x)$ heisse *ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck, Ω der determinirende Factor.*

Ein Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$, der sich als ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck darstellen lässt, nimmt diese Form nur auf *eine* Weise an. Aus $\Omega \bar{F}_m(\Omega^{-1}y, s, x) = \Omega_1 \bar{G}_m(\Omega_1^{-1}y, s, x)$, $\Omega = e^W$, $\Omega_1 = e^{W_1}$ folgt $\bar{F}_m(y, s, x) = \frac{\Omega_1}{\Omega} \bar{G}_m\left(\frac{\Omega}{\Omega_1}y, s, x\right)$. Daher $W = W_1$, weil sonst

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} \bar{G}_m\left(\frac{\Omega}{\Omega_1}y, s, x\right) = 0$$

an einer Stelle von x, wo $W - W_1$ unendlich wird, kein reguläres Integral hätte. Und es ist $\bar{F}_m(y, s, x) = \Omega^{-1} F_m(\Omega y, s, x)$.

Ein homogener linearer Differentialausdruck, der rationale Functionen von x als Coefficienten hat und normal ist, der sich also auf die Form $\Omega \bar{F}_m(\Omega^{-1}y, x)$ bringen lässt, wo $\bar{F}_m(\bar{y}, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x rationalen Coefficienten, der regulär ist (vgl. Abh. Bd. 96 No. 5), ist zugleich ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck.

Ein homogener linearer Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$, dessen Coefficienten rational x und s enthalten — s darf auch fehlen, — sei durch einen Ausdruck der Form

$$(3.) \qquad f_{a_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{a_1}(y_1, s, x) = y_2, \ \ldots, \ f_{a_l}(y_l, s, x)$$

darstellbar, wo $f_{a_r}(y_r, s, x)$ $(r = 0, \ldots, l)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x und s rationalen Coefficienten ist, wobei s auch fehlen darf. Die Differentialquotienten von s werden vermittelst der Gleichung von s rational durch x und s ausgedrückt. Der Ausdruck (3.) heisst ein *System*, f_{a_r} $(r = 0, \ldots, l)$, wo $l+1 \geqq 1$ ist, heissen die *Bestandtheile des Systems.*

B) *Es können nun die Sätze, welche in Abh. Bd. 96 No. 8 in Bezug auf Systeme normaler Differentialausdrücke gegeben sind, und die zugehörigen*

Beweise auf Systeme in dem Bereiche s normaler Differentialausdrücke übertragen werden.

a) Hierzu sind dem dort Angegebenen entsprechend folgende Definitionen einzuführen.

Zwei in dem Bereiche s normale Differentialausdrücke werden ***ähnlich*** genannt, wenn sie in dem Bereiche s unzerlegbar, von derselben Ordnung und demselben determinirenden Factor sind, und wenn die zugehörigen in dem Bereiche s regulären Differentialausdrucke gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, bei denen in jedem Punkte — und zwar bei einem R-blättrigen Windungspunkte $x = a$ von s $(R \geqq 1)$ nach Substitution von $x - a = \zeta^R$ (bei $x = \infty$ wird $x = \frac{1}{t}$ gesetzt), vgl. Abh. Bd. 115 No. 5 — die Wurzeln der Exponentengleichung der einen sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung der anderen so paaren lassen, dass die Wurzeln in jedem Paare sich höchstens um eine ganze Zahl unterscheiden.

Zwei Systeme in dem Bereiche s normaler Differentialausdrücke heissen ***ähnlich,*** wenn sie gleich viele Bestandtheile haben und die Bestandtheile von derselben Stelle ähnlich sind.

Es werde noch folgende Transformation vorgenommen. In dem Differentialausdruck $\mathfrak{a}_r$-ter Ordnung $f_{\mathfrak{a}_r}(y, s, x)$ (3.) werde bei einem R-blättrigen Windungspunkte $x = a$ von s in der Entwickelung von s nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ und ebenso in dem Differentialausdruck $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ gesetzt. Hierdurch gehe $f_{\mathfrak{a}_r}(y, s, x)$ über in

$$(4.) \qquad f_{\mathfrak{a}_r}(y, s, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-\mathfrak{a}_r} g_{\mathfrak{a}_r}(y, s, \zeta),$$

wo der homogene lineare Differentialausdruck $g_{\mathfrak{a}_r}$ s und ζ in den Coefficienten rational enthält, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 ist. Dann geht durch dieselbe Substitution das System

$$(5.) \qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, s, x)$$

über in

$$(6.) \qquad \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a}_1}\left\{g_{\mathfrak{a}_0}(y, s, \zeta) = y', \quad \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{\mathfrak{a}_0} g_{\mathfrak{a}_1}\left(\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-\mathfrak{a}_0} y', s, \zeta\right)\right\}.$$

Entsprechend bei Substitution von $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$.

b) Nun werden folgende Sätze entsprechend Abh. Bd. 96 No. 8 I aufgestellt und wie dort angegeben (vergl. hier (6.)) bewiesen.

Wenn ein in dem Bereiche s regulärer Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System (3.) darstellbar ist, so müssen die Bestandtheile des Systems in dem Bereiche s reguläre Differentialausdrücke sein. Daraus folgt, wenn $F_m(y, s, x)$ ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω ist, und eine Darstellung durch ein System (3.) hat, so müssen die Bestandtheile dieses Systems in dem Bereiche s normale Differentialausdrücke mit demselben determinirenden Factor Ω sein.

Alsdann ergeben sich zunächst die den beiden Hülfssätzen in Abh. Bd. 96 No. 8 II A entsprechenden Sätze durch das den dort angegebenen Beweisen entsprechende Verfahren (vergl. I und (6.)).

Nachdem diese beiden Sätze bewiesen sind, lassen sich alle in Abh. Bd. 96 No. 8 II angegebenen Sätze mit zugehörigen Beweisen, welche dort in Bezug auf Systeme normaler Differentialausdrücke aufgestellt sind, unmittelbar auf Systeme in dem Bereiche s normaler Differentialausdrücke übertragen.

Daher wird im Folgenden (III und V), wenn von letzteren Sätzen Gebrauch gemacht wird, einfach auf die entsprechenden Stellen in Abh. Bd. 96 No. 8 II verwiesen.

c) Auch die in Abh. Bd. 96 No. 8 III aufgestellten Sätze über reciproke Differentialausdrücke bleiben mit den Beweisen bestehen, wenn die Coefficienten der Differentialausdrücke rational x und s enthalten. Man braucht bei dem Beweise nur einen Zweig von s als Function von x in Betracht zu ziehen, um von hier aus das allgemeine Resultat zu erhalten. Ferner kommt folgende Beziehung zur Anwendung. Der reciproke Differentialausdruck von $F_m(y, s, x)$ sei durch $\underline{F}_m(\underline{y}, s, x)$ bezeichnet. Es werde bei dem R-blättrigen Windungspunkt von s $x = a$ gesetzt $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$. (Entsprechend bei $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$). $\underline{y}$ sei ein Integral von $\underline{F}_m(\underline{y}, s, x) = 0$ bei einem Zweige von s. Aus der Relation

$$\underline{y} F_m(y, s, x) = \frac{d}{dx} \{\underline{y} f_{m-1}(y, x)\}, \tag{7.}$$

wo f_{m-1} ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-1)$-ter Ordnung, und den Relationen

$$\begin{cases} F_m(y, s, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m(y, s, \zeta), \\ f_{m-1}(y, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} g_{m-1}(y, \zeta), \end{cases} \tag{8.}$$

wo G_m ein homogener linearer Ausdruck m-ter Ordnung, der s und ζ in den Coefficienten rational enthält, g_{m-1} ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-1)$-ter Ordnung ist, folgt

$$(9.) \qquad \underline{y}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} G_m(y, s, \zeta) = \frac{d}{d\zeta}\left\{\underline{y}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} g_{m-1}(y, \zeta)\right\}.$$

Es werde nun

$$(10.) \qquad F_m(\underline{y}, s, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} H_m(\underline{y}, s, \zeta)$$

gesetzt, wo H_m ein homogener linearer Differentialausdruck m-ter Ordnung, der s und ζ rational in den Coefficienten enthält, so ergiebt sich aus (9.) und (10.), dass der reciproke Differentialausdruck von $G_m(y, s, \zeta)$ gleich ist

$$(11.) \qquad \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} H_m\left(\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{m-1} y, s, \zeta\right).$$

C) Man kann unter Bezugnahme auf Abh. Bd. 96 No. 9 I, II A und Abh. Bd. 115 No. 5 ***in dem Bereiche s bei einem Punkte x normale Differentialausdrücke*** definiren. Es sei $\bar{F}_m(y, s, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck, der x und s rational in den Coefficienten enthält und bei einem Punkte $x = a$ (bez. $x = \infty$) regulär ist, w gleich Null oder $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, so ist $e^w \bar{F}(e^{-w}y, s, x)$ ein in dem Bereiche s bei dem Punkte $x = a$ normaler Differentialausdruck. Auf die Systeme solcher Differentialausdrücke lassen sich die Sätze aus Abh. Bd. 96 No. 9 I, II A übertragen.

III.

Das Vorhergehende wird nun angewandt, um die Beziehung eines homogenen linearen Differentialausdruckes m-ter Ordnung $F_m(y, s, x)$, der x und die irreductibele algebraische Function s rational in den Coefficienten enthält, zu dem homogenen linearen Differentialausdruck N-ter Ordnung $\Phi_N(y, x)$ mit rationalen Functionen von x als Coefficienten näher zu untersuchen, wo die Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ als N Integrale die linearunabhängigen Integrale von $F_m(y, s, x) = 0$ hat. $\Phi_N(y, x) = 0$ ist in Abh. Bd. 121 dieses Journals die ***Connexdifferentialgleichung*** von $F_m(y, s, x) = 0$ genannt worden.

Der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ sei durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar. — Unter dieser Voraussetzung war in Abhandlung Bd. 121 die Integration von $F_m(y, s, x) = 0$ auf die von $\Phi_N(y, x) = 0$ zurückgeführt. — Jeder dieser normalen Differentialausdrücke, die Bestand-

theile des Systems für $\Phi_N(y, x)$ sind, sei weiter zerlegt in ein System im Bereiche s unzerlegbarer Differentialausdrücke (I), diese sind im Bereiche s normale mit demselben determinirenden Factor (IIBb). Im Ganzen ist also $\Phi_N(y, x)$ durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellbar. Der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ ist entweder im Bereiche s unzerlegbar oder mittelst successiver Zerlegung durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer Differentialausdrücke darstellbar (I). Die Integrale von $F_m(y, s, x) = 0$ erfüllen $\Phi_N(y, x) = 0$. Daraus folgt (entsprechend dem Satz Abh. Bd. 96 No. 8 IIBc; vergl. hier IIBb) dass $F_m(y, s, x)$ durch ein System (mit einem oder mehreren Bestandtheilen) im Bereiche s unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellbar ist.

Also wenn der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ von der Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, so ist der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar.

Der umgekehrte Satz wird in IV, V nachgewiesen.

IV.

Der homogene lineare Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ enthalte in den Coefficienten rational die unabhängige Variable x und die irreductibele algebraische Function s. Es soll die Connexdifferentialgleichung der Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$ (s. III) aufgestellt werden, wenn $F_m(y, s, x)$ durch das System

$$f(y, s, x) = y_1, \quad g(y_1, s, x) \tag{12.}$$

gegeben ist, wo f und g homogene lineare Differentialausdrücke sind, welche x und s rational in den Coefficienten enthalten (wo s auch fehlen kann). Die Connexdifferentialgleichung von $f(y, s, x) = 0$ sei $\varphi(y, x) = 0$. Der Differentialausdruck $\varphi(y, x)$ hat dann (IB) die Darstellung durch das System

$$f(y, s, x) = y_1, \quad f_1(y_1, s, x), \tag{13.}$$

wo f_1 ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x und s rationalen Coefficienten.

Die beiden Differentialgleichungen $f_1(y_1, s, x) = 0$ und $g(y_1, s, x) = 0$ können gemeinsame Integrale haben. Diese erfüllen (IB) eine homogene lineare Differentialgleichung $h(y_1, s, x) = 0$, welche x und s rational in den

Coefficienten enthält. $f_1(y_1, s, x)$ hat nun die Darstellung durch das System

(14.) $$h(y_1, s, x) = y_2, \quad f_1'(y_2, s, x),$$

$g(y_1, s, x)$ die Darstellung durch das System

(15.) $$h(y_1, s, x) = y_2, \quad g'(y_2, s, x),$$

wo f_1' und g' homogene lineare Differentialausdrücke, die x und s rational in den Coefficienten enthalten, f_1' und g' auch nullter Ordnung sein kann. Haben die beiden Differentialgleichungen $f_1(y_1, s, x) = 0$ und $g(y_1, s, x) = 0$ kein gemeinsames Integral, so ist in (14.) und (15.) $h(y_1, s, x)$ als von nullter Ordnung anzunehmen.

Die Integrale von $f_1'(y_2, s, x) = 0$ und $g'(y_2, s, x) = 0$ seien vereinigt in einer homogenen linearen Differentialgleichung (IA), deren Differentialausdruck durch das System

(16.) $$f_1'(y_2, s, x) = y', \quad g''(y', s, x)$$

gegeben wird, wo g'' ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x und s rationalen Coefficienten. — Ist f_1' nullter Ordnung, so ist $g' = g''$; ist g' nullter Ordnung, so auch g''. —

Die Connexdifferentialgleichung von $g''(y', s, x) = 0$ sei $\chi(y', x) = 0$. — Ist g'' nullter Ordnung, so auch χ. —

Dann ist die Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ ***oder von***

(17.) $$f(y, s, x) = y_1, \quad g(y_1, s, x) = 0$$

gegeben durch

(18.) $$\varphi(y, x) = y', \quad \chi(y', x) = 0.$$

Denn jedes Integral von (17.) erfüllt (18.) (vgl. (15.)). Ferner ergiebt sich ein System linearunabhängiger Integrale von (18.), welches (17.) erfüllt. Die linearunabhängigen Integrale von $g''(y', s, x) = 0$ sind diejenigen von $\chi(y', x) = 0$. Ein solches sei durch y' bezeichnet. Nun giebt es bei demselben Zweige von s ein Integral y_1 von $g(y_1, s, x) = 0$, welches

(19.) $$h(y_1, s, x) = y_2, \quad f_1'(y_2, s, x) = y'$$

erfüllt. Ist dann y ein Integral von $f(y, s, x) = y_1$, so erfüllt y die Differentialgleichungen $\varphi(y, x) = y'$ und (17.). Ausserdem wird ein System linearunabhängiger Integrale von $\varphi(y, x) = 0$ durch diejenigen von $f(y, s, x) = 0$ gegeben.

V.

Nun sei der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System

(20.) $$f_{a_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{a_1}(y_1, s, x) = y_2, \quad \ldots, \quad f_{a_l}(y_l, s, x)$$

gegeben, in welchem $f_{a_r}(y_r, s, x)$ $(r = 0, \ldots, l,\ l+1 \geqq 1)$ ein im Bereiche s normaler Differentialausdruck ist. Ein solcher Bestandtheil f_{a_r} ist entweder schon im Bereiche s unzerlegbar, oder kann successive in ein System im Bereiche s unzerlegbarer Differentialausdrücke zerlegt werden (I), die selbst im Bereiche s normal mit demselben determinirenden Factor sind (IIBb.). Daher werden die Bestandtheile in dem Systeme (20.) als im Bereiche s unzerlegbar vorausgesetzt.

Es soll nun der Satz nachgewiesen werden, dass die Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ einen Differentialausdruck hat, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, in welchem die determinirenden Factoren, die unter einander verschieden sind, genau die verschiedenen aus dem Systeme (20.) sind.

Dieser Satz gilt zunächst von der Differentialgleichung $f_{a_0}(y, s, x) = 0$. Nun wird successive der Satz aus IV angewandt.

Der hier behauptete Satz sei bereits bewiesen für die Differentialgleichung, deren Differentialausdruck durch das System

$$(21.)\quad f_{a_0}(y, s, x) = y_1,\quad f_{a_1}(y_1, s, x) = y_2,\ \ldots, f_{a_{h-1}}(y_{h-1}, s, x)$$

gegeben ist. Dieses System sei der Differentialausdruck $f(y, s, x)$ aus IV (12.) und $f_{a_h}(y_h, s, x)$ sei der Differentialausdruck $g(y_1, s, x)$ aus IV (12.). Für die Connexdifferentialgleichung $\varphi(y, x) = 0$ von $f(y, s, x) = 0$ in IV gilt also der Satz als bereits bewiesen. $\varphi(y, x)$ ist daher auch durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer normaler Ausdrücke mit den verschiedenen determinirenden Factoren aus (21.) darstellbar. Daraus folgt (entsprechend dem in IIBb Gesagten und den Sätzen Abh. Bd. 96 No. 8 IIBb, c), dass der Differentialausdruck $f_1(y_1, s, x)$ (IV (13.)) eine Darstellung durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke mit determinirenden Factoren aus dem Systeme für $\varphi(y, x)$, daher aus dem Systeme (21.) hat. Da hier $g(y_1, s, x)$ im Bereiche s unzerlegbar, so ist in IV(15.) entweder h oder g' nullter Ordnung. h sei nullter Ordnung. Nach dem Satze, der Abh. Bd. 96 No. 8 Ca) (vergl. hier II Bb) entspricht, ist in IV (16.) $g''(y', s, x)$ ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor aus $g(y_1, s, x)$. Daher ist der Differentialausdruck $\chi(y, x)$ in IV(18.) ein normaler Differentialausdruck mit demselben determinirenden Factor. g' sei nullter Ordnung, daher auch χ in IV(18.). Dann ist der determinirende

Factor in $g(y_1, s, x)$ unter denen in dem System für $f_1(y_1, s, x)$ enthalten, nach dem Satze, der Abh. Bd. 96 No. 8 IIBb entspricht.

Damit ist der behauptete Satz auch bewiesen für die Differentialgleichung, deren Differentialausdruck durch das System

(22.) $$f_{a_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{a_1}(y_1, s, x) = y_2, \ \ldots, f_{a_h}(y_h, s, x)$$

gegeben ist, und demnach allgemein.

Durch Verbindung dieses Satzes mit dem Satze in III erhält man also das Resultat:

Die homogene lineare Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$, ***die in den Coefficienten rational die unabhängige Variable*** x ***und die irreductibele algebraische Function*** s ***enthält, habe zur Connexdifferentialgleichung*** $\Phi_N(y, x) = 0$. ***Ist*** $\Phi_N(y, x)$ ***durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, so ist*** $F_m(y, s, x)$ ***durch ein System im Bereiche*** s ***normaler Differentialausdrücke darstellbar und umgekehrt. Diejenigen determinirenden Factoren in dem Systeme für*** $F_m(y, s, x)$, ***welche unter einander verschieden sind, bilden die verschiedenen determinirenden Factoren in dem Systeme für*** $\Phi_N(y, x)$.

VI.

a) In Abhandlung Bd. 121 dieses Journals ist die Integration der Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$, bei welcher der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, auf die Integration von $\Phi_N(y, x) = 0$ zurückgeführt; desgleichen die Integration der nichthomogenen Differentialgleichung, worin $F_m(y, s, x)$ der Differentialausdruck ist.

Nach dem Satze in V hat $F_m(y, s, x)$ die Darstellung durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke. Bei den unter einander verschiedenen determinirenden Factoren dieses Systemes e^W sei aus der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function von x W der Theil herausgenommen, der in einem singulären Punkte $x = a$ von $F_m = 0$ unendlich wird, $w\left(\frac{1}{x-a}\right)$, wo w gleich Null, wenn in $x = a$ W nicht unendlich wird. Die hierdurch aus den determinirenden Factoren hervorgehenden verschiedenen Ausdrücke seien $e^{w_\gamma\left(\frac{1}{x-a}\right)}$. Nun sei bei $x = a$ ein R-blättriger Windungspunkt von s, wo $R \geqq 1$ ist, und es werde die Substitution $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ in F_m eingeführt, wodurch $F_m = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m$. Werden nun aus

$G_m(y, s, \zeta) = 0$ die fundamentalen determinirenden Factoren bei $\zeta = 0$ bestimmt, so ergiebt sich nach Abh. Bd. 96 No. 3 (12.) unter Anwendung der Relation II(5.)(6.), dass dieses die Grössen $e^{w_\gamma(\zeta^{-R})}$ sind.

Nachdem daher in dieselben für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt ist, müssen die Grössen $e^{w_\gamma(\frac{1}{x-a})}$ hervorgehen. ***Diese sind also bei allen ein- oder mehrblättrigen Windungspunkten bei $x = a$ ein und dieselben Ausdrücke; und bei dem einzelnen dieser Ausdrücke ist immer dieselbe Anzahl der Wurzeln der nach Einführung von ζ zugehörigen Exponentengleichung vorhanden; deren Gesammtanzahl gleich m.*** Entsprechend bei $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$.

Es ist also zunächst bei $F_m(y, s, x) = 0$ zu prüfen, ob bei den singulären Punkten die angegebene Eigenschaft vorhanden ist. Ergiebt sich etwa bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ nur ein einziger von x abhängender fundamentaler determinirender Factor, so ist $F_m(y, s, x)$ selbst im Bereiche s normal und der determinirende Factor das Product jener fundamentalen determinirenden Factoren.

Die genannten Grössen $e^{w_\gamma(\frac{1}{x-a})}$ werden nach Satz V die fundamentalen determinirenden Factoren bei $x = a$ in $\Phi_N(y, x) = 0$. Wird in $\Phi_N(y, x) = 0$ $x - a = \zeta^R$ gesetzt, so müssen unter den Wurzeln der Exponentengleichung, die zu dem fundamentalen determinirenden Factor $e^{w_\gamma(\zeta^{-R})}$ gehört, die Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m(y, s, \zeta) = 0$, die zu demselben fundamentalen determinirenden Factor gehört (abgesehen von zu addirenden ganzen Zahlen) vorkommen. Aus Abh. Bd. 121 No. 5 III A folgt: Wird jede dieser Wurzeln durch ϱ bezeichnet, die Reihe $\frac{\varrho}{R}, \frac{\varrho+1}{R}, \ldots, \frac{\varrho+R-1}{R}$ gebildet, das Entsprechende bei jedem Windungspunkte bei $x = a$ in $F_m(y, s, x) = 0$ vorgenommen, so darf $\Phi_N(y, x) = 0$ nur aus den genannten Reihen Exponenten der Integrale (abgesehen von zu addirenden ganzen Zahlen) bei $x = a$ liefern. Ebenso bei $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$. ***Auf diese Eigenschaften ist also $\Phi_N(y, x)$ zunächst zu prüfen.***

b) Die homogene lineare Differentialgleichung $F_m = 0$ mit algebraischen Coefficienten enthalte in den Coefficienten rational mehrere irreductibele algebraische Functionen, etwa u, v, w. Es sollen alle Combinationen der Zweige von u, v, w in Zusammenhang stehen (z. B. ist dieses der Fall, wenn

die Grade der irreductibelen Gleichungen von u, v, w relative Primzahlen sind). Die Coefficienten in F_m erhalten die Form $\frac{H(x,u,v,w)}{K(x)}$, wo H und K ganze rationale Ausdrücke der eingehenden Variablen, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Die Zweige von u, v, w seien nun rational durch x und eine irreductibele algebraische Function s ausgedrückt mit so vielen Zweigen, als Combinationen vorhanden sind (Abh. Bd. 119 No. 1). F_m hat unter der über die Connexdifferentialgleichung gemachten Voraussetzung die Darstellung durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke. In diesen Ausdrücken sei für s wieder $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w$ gemäss Abh. Bd. 119 No. 1 (10.) eingesetzt. Aus dieser Darstellung ergiebt sich nun auf dieselbe Weise wie in a), wenn bei einem singulären Punkte $x=a$ von $F_m=0$ bei einem Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w, wo $R \geqq 1$ ist, die Substitution $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$ eingeführt wird, wodurch $F_m=\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m$, alsdann aus $G_m(y, u, v, w, \zeta)=0$ die fundamentalen determinirenden Factoren bei $\zeta=0$ bestimmt werden und in diese für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt wird, so erhält man *bei allen solchen Complexen bei $x=a$ dieselben Ausdrücke, und bei dem einzelnen dieser Ausdrücke immer dieselbe Anzahl der Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichung, deren Gesammtzahl gleich m. Daraufhin ist also zunächst*

$$F_m(y, u, v, w, x)=0$$

bei den singulären Punkten zu prüfen. Ebenso gilt in Bezug auf $\Phi_N(y, x)=0$ bei $x=a$ das in a) Gesagte.

c) Die homogene lineare Differentialgleichung $F_m=0$ habe algebraische Coefficienten unter der Form $\frac{H(x,u,v,w)}{K(x)}$, wie in b), es sollen aber nicht alle Combinationen der Zweige von u, v, w in Zusammenhang stehen. Die Connexdifferentialgleichung von $F_m=0$ sei $\Phi_N(y, x)=0$. Die Zweige u, v, w einer Combination und die mit dieser zusammenhängenden Combinationen seien durch eine irreductible Function s und x nach Abh. Bd. 119 No. 1 ausgedrückt und es sei von jeder solchen Differentialgleichung die Connexdifferentialgleichung aufgestellt. Ist jeder der hierdurch hervorgehenden Differentialausdrücke durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, so auch $\Phi_N(y, x)$ und umgekehrt (Abh. Bd. 96 No. 8 IIB, C).

2.

Homogene lineare Differentialgleichung, deren Integral eine homogene lineare Verbindung mit gegebenen Coefficienten des Integrals einer anderen homogenen linearen Differentialgleichung und seiner Ableitungen ist.

Bei einer vorgelegten homogenen linearen Differentialgleichung wird aus dem Integrale derselben und seinen Ableitungen ein homogener linearer Ausdruck mit Coefficienten, die gegebene Functionen der unabhängigen Variablen sind, gebildet und untersucht. (In Betreff der Litteratur über diesen Gegenstand vergl. ***Schlesinger,*** Handbuch der Theorie der linearen Differential gleichungen 2. Band I S. 119, 349.)

I.

In der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$, nämlich

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1.}$$

sollen die Coefficienten p in einem einblättrigen einfach zusammenhängenden Gebiete von x als einwerthige Functionen betrachtet worden. Wenn diese Coefficienten rational x und eine irreductibele algebraische Function s von x enthalten, so wird jeder einzelne Zweig derselben genommen.

Nun wird die Function z durch folgenden Ausdruck aufgestellt:

$$z = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, \tag{2.}$$

wo y ein Integral aus (1.) ist, die Coefficienten a in dem betrachteten Gebiete von x gegebene einwerthige Functionen von x sind; wenn diese Coefficienten rational x und die algebraische Function s enthalten, so wird derselbe Zweig von s wie in den Coefficienten p genommen. a_{m-1} und Coefficienten a mit niedrigerem Stellenzeiger können auch Null sein. Durch Differentiation von z ergiebt sich, indem die Ableitungen von y, die höher als die $(m-1)$-te sind, vermittelst (1.) durch die niedrigeren ausgedrückt werden:

$$\frac{d^r z}{dy^r} = a_0^{(r)} y + a_1^{(r)} \frac{dy}{dx} + \cdots + a_{m-1}^{(r)} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}. \tag{3.}$$

Die Determinante der a aus (2.) und (3.) für $r = 1, \ldots, m-1$ soll ***nicht identisch gleich Null sein.*** Dieselbe sei durch $D(a)$ bezeichnet.

Alsdann ergiebt sich aus (2.) und (3.) für $r = 1, \ldots, m$ die Differentialgleichung für z $G_m(z, x) = 0$, nämlich

$$\frac{d^m z}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m z = 0, \tag{4.}$$

worin die Coefficienten q rationale Ausdrücke der p (1.), und der a (2.) und Ableitungen dieser Grössen sind.

Es seien m linearunabhängige Integrale von (1.) y_1, y_2 bis y_m. Die Determinante derselben und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen sei $D(y)$. Diese Integrale y_1 bis y_m werden in (2.) eingesetzt, die sich ergebenden Grössen seien z_1, z_2 bis z_m. Die Determinante dieser Functionen und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen sei $D(z)$. Dann folgt aus (2.) und (3.) für $r = 1, \ldots, m-1$

$$D(z) = D(a)D(y). \tag{5.}$$

Die Determinanten $D(a)$ und $D(y)$ sind nicht identisch gleich Null, desgleichen also $D(z)$; die Integrale z_1, z_2 bis z_m von (4.) sind linearunabhängig.

Aus (2.) und (3.) für $r = 1, \ldots, m-1$ folgt durch Umkehrung

$$y = b_0 z + b_1 \frac{dz}{dx} + \cdots + b_{m-1} \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}, \tag{6.}$$

die Coefficienten b setzen sich rational aus den p (1.), den a (2.) und Ableitungen dieser Grössen zusammen. Dem Ausdrucke $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$, worin die c willkürliche Constanten, entspricht gemäss (2.) der Ausdruck $z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m$. Also entspricht jedem Integrale der Differentialgleichung (1.) vermöge der Relation (2.) ein Integral der Differentialgleichung (4.) und umgekehrt jedem Integrale von (4.) vermöge der Relation (6.) ein Integral von (1.). Durch Differentiation von y (6.) ergiebt sich vermittelst der Differentialgleichung (4.)

$$\frac{d^r y}{dx^r} = b_0^{(r)} z + b_1^{(r)} \frac{dz}{dx} + \cdots + b_{m-1}^{(r)} \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}. \tag{7.}$$

Die Determinante der b aus (6.) und (7.) für $r = 1, \ldots, m-1$ sei durch $D(b)$ bezeichnet. Aus (6.) und (7.) folgt

$$D(y) = D(b)D(z). \tag{8.}$$

Daher ist $D(b)$ nicht identisch gleich Null.

II.

Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ in (1.) sei dargestellt durch das System

$$F_{m-k}(y, x) = y', \quad f_k(y', x), \tag{9.}$$

wo $F_{m-k}(y, x)$ der Differentialausdruck

$$\frac{d^{m-k} y}{dx^{m-k}} + p_1^{(1)} \frac{d^{m-k-1} y}{dx^{m-k-1}} + \cdots + p_{m-k}^{(1)} y \tag{10.}$$

ist, $f_k(y', x)$ der Differentialausdruck

$$\frac{d^k y'}{dx^k} + p_1^{(2)} \frac{d^{k-1} y'}{dx^{k-1}} + \cdots + p_k^{(2)} y'. \tag{11.}$$

Die Coefficienten $p^{(1)}$ in (10.) sollen in dem betrachteten Gebiete von x einwerthig sein; wenn dieselben rational x und die algebraische Function s aus den p in (1.) enthalten, so wird in $p^{(1)}$(10.) und p(1.) derselbe Zweig von s genommen. Die Coefficienten $p^{(2)}$ in (11.) setzen sich rational aus den p in (1.), den $p^{(1)}$ in (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammen.

Die Differentialgleichung $F_{m-k}(y, x) = 0$ habe als $m-k$ linearunabhängige Integrale y_1, y_2 bis y_{m-k}. Wird für y in (2.) $y_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m-k)$ eingesetzt, so ergiebt sich $z_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m-k)$. Die $m-k$ Functionen $z_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m-k)$ sind linearunabhängig (vergl. (5.)). Der Ausdruck (2.) wird vermittelst $F_{m-k}(y, x) = 0$ auf die Form

$$z = A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + A_{m-k-1} \frac{d^{m-k-1} y}{dx^{m-k-1}} \tag{12.}$$

gebracht, wo die Coefficienten A sich rational aus den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen. Aus (12.) ergiebt sich durch Differentiation vermittelst $F_{m-k}(y, x) = 0$:

$$\frac{d^r z}{dx^r} = A_0^{(r)} y + A_1^{(r)} \frac{dy}{dx} + \cdots + A_{m-k-1}^{(r)} \frac{d^{m-k-1} y}{dx^{m-k-1}}. \tag{13.}$$

Die Determinante der Coefficienten A aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$ sei durch $\Delta(A)$ bezeichnet, die Determinante der linearunabhängigen Functionen y_1 bis y_{m-k} und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen durch $\Delta(y)$, die der linearunabhängigen Functionen z_1 bis z_{m-k} und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen durch $\Delta(z)$. Dann folgt aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$

$$\Delta(z) = \Delta(A)\Delta(y). \tag{14.}$$

Daher ist $\Delta(A)$ nicht identisch gleich Null. Alsdann ergiebt sich aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k$ die Differentialgleichung $G_{m-k}(z, x) = 0$ nämlich

$$\frac{d^{m-k} z}{dx^{m-k}} + q_1^{(1)} \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}} + \cdots + q_{m-k}^{(1)} z = 0, \tag{15.}$$

worin die Coefficienten q rationale Ausdrücke der a (2.), der $p^{(1)}$(10.) und Ableitungen dieser Grössen sind.

Aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$ folgt durch Umkehrung

$$y = B_0 z + B_1 \frac{dz}{dx} + \cdots + B_{m-k-1} \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}}, \tag{16.}$$

wo die Coefficienten B sich rational aus den a (2.), den $p^{(1)}$(10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen. Da aus $c_1 y_1 + \cdots + c_{m-k} y_{m-k}$, wo die c willkürliche Constanten sind, gemäss (12.) $c_1 z_1 + \cdots + c_{m-k} z_{m-k}$ folgt, so entspricht jedem Integral von $F_{m-k}(y, x) = 0$ (10.) vermöge (12.) ein Integral von $G_{m-k}(z, x) = 0$ (15.) und umgekehrt jedem Integral von $G_{m-k}(z, x) = 0$ vermöge (16.) ein Integral von $F_{m-k}(y, x) = 0$. Aus (16.) folgt vermittelst der Differentialgleichung (15.)

$$(17.) \qquad \frac{d^r y}{dx^r} = B_0^{(r)} z + B_1^{(r)} \frac{dz}{dx} + \cdots + B_{m-k-1}^{(r)} \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}}.$$

Die Determinante der B aus (16.) und (17.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$ sei durch $\Delta(B)$ bezeichnet. Dann ergiebt sich aus (16.) und (17.)

$$(18.) \qquad \Delta(y) = \Delta(B)\Delta(z).$$

Daher ist $\Delta(B)$ nicht identisch gleich Null.

Der Differentialausdruck $G_m(z, x)$ aus (4.) wird nun dargestellt durch das System

$$(19.) \qquad G_{m-k}(z, x) = z', \quad g_k(z', x),$$

wo $G_{m-k}(z, x)$ der Differentialausdruck aus (15.), $g_k(z', x)$ der Differentialausdruck ist

$$(20.) \qquad \frac{d^k z'}{dx^k} + q_1^{(2)} \frac{d^{k-1} z'}{dx^{k-1}} + \cdots + q_k^{(2)} z',$$

worin die Coefficienten $q^{(2)}$ sich rational aus den q (4.), den $q^{(1)}$ (15.) und ihren Ableitungen, demnach rational aus den p (1.), den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen.

III.

In

$$(21.) \qquad F_{m-k}(y, x) = y'$$

(9.) seien für y die Integrale $y_{m-k+s}(s = 1, \ldots, k)$ eingesetzt, welche mit den Integralen y_1 bis y_{m-k} von $F_{m-k}(y, x) = 0$ ein System von m linearunabhängigen Integralen von $F_m(y, x) = 0$ (1.) bilden. Hierdurch ergebe sich

$$(22.) \qquad F_{m-k}(y_{m-k+s}, x) = y_s', \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Die Functionen $y_s'(s = 1, \ldots, k)$ sind k linearunabhängige Integrale der Differentialgleichung $f_k(y', x) = 0$ (11.). Wenn für y in dem Ausdrucke (2.) die Functionen $y_{m-k+s}(s = 1, \ldots, k)$ gesetzt werden, so ergeben sich die Functionen $z_{m-k-s}(s = 1, \ldots, k)$, welche mit den Integralen z_1 bis z_{m-k} von $G_{m-k}(z, x) = 0$

ist, $f_k(y', x)$ der Differentialausdruck

$$(11.) \qquad \frac{d^k y'}{dx^k} + p_1^{(2)} \frac{d^{k-1} y'}{dx^{k-1}} + \cdots + p_k^{(2)} y'.$$

Die Coefficienten $p^{(1)}$ in (10.) sollen in dem betrachteten Gebiete von x einwerthig sein; wenn dieselben rational x und die algebraische Function s aus den p in (1.) enthalten, so wird in $p^{(1)}$(10.) und p(1.) derselbe Zweig von s genommen. Die Coefficienten $p^{(2)}$ in (11.) setzen sich rational aus den p in (1.), den $p^{(1)}$ in (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammen.

Die Differentialgleichung $F_{m-k}(y, x) = 0$ habe als $m-k$ linearunabhängige Integrale y_1, y_2 bis y_{m-k}. Wird für y in (2.) $y_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m-k)$ eingesetzt, so ergiebt sich $z_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m-k)$. Die $m-k$ Functionen $z_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m-k)$ sind linearunabhängig (vergl. (5.)). Der Ausdruck (2.) wird vermittelst $F_{m-k}(y, x) = 0$ auf die Form

$$(12.) \qquad z = A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + A_{m-k-1} \frac{d^{m-k-1} y}{dx^{m-k-1}}$$

gebracht, wo die Coefficienten A sich rational aus den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen. Aus (12.) ergiebt sich durch Differentiation vermittelst $F_{m-k}(y, x) = 0$:

$$(13.) \qquad \frac{d^r z}{dx^r} = A_0^{(r)} y + A_1^{(r)} \frac{dy}{dx} + \cdots + A_{m-k-1}^{(r)} \frac{d^{m-k-1} y}{dx^{m-k-1}}.$$

Die Determinante der Coefficienten A aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$ sei durch $\Delta(A)$ bezeichnet, die Determinante der linearunabhängigen Functionen y_1 bis y_{m-k} und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen durch $\Delta(y)$, die der linearunabhängigen Functionen z_1 bis z_{m-k} und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen durch $\Delta(z)$. Dann folgt aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$

$$(14.) \qquad \Delta(z) = \Delta(A)\Delta(y).$$

Daher ist $\Delta(A)$ nicht identisch gleich Null. Alsdann ergiebt sich aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k$ die Differentialgleichung $G_{m-k}(z, x) = 0$ nämlich

$$(15.) \qquad \frac{d^{m-k} z}{dx^{m-k}} + q_1^{(1)} \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}} + \cdots + q_{m-k}^{(1)} z = 0,$$

worin die Coefficienten q rationale Ausdrücke der a (2.), der $p^{(1)}$(10.) und Ableitungen dieser Grössen sind.

Aus (12.) und (13.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$ folgt durch Umkehrung

$$(16.) \qquad y = B_0 z + B_1 \frac{dz}{dx} + \cdots + B_{m-k-1} \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}},$$

wo die Coefficienten B sich rational aus den a (2.), den $p^{(1)}$(10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen. Da aus $c_1 y_1 + \cdots + c_{m-k} y_{m-k}$, wo die c willkürliche Constanten sind, gemäss (12.) $c_1 z_1 + \cdots + c_{m-k} z_{m-k}$ folgt, so entspricht jedem Integral von $F_{m-k}(y, x) = 0$ (10.) vermöge (12.) ein Integral von $G_{m-k}(z, x) = 0$ (15.) und umgekehrt jedem Integral von $G_{m-k}(z, x) = 0$ vermöge (16.) ein Integral von $F_{m-k}(y, x) = 0$. Aus (16.) folgt vermittelst der Differentialgleichung (15.)

$$(17.) \qquad \frac{d^r y}{dx^r} = B_0^{(r)} z + B_1^{(r)} \frac{dz}{dx} + \cdots + B_{m-k-1}^{(r)} \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}}.$$

Die Determinante der B aus (16.) und (17.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$ sei durch $\Delta(B)$ bezeichnet. Dann ergiebt sich aus (16.) und (17.)

$$(18.) \qquad \Delta(y) = \Delta(B)\Delta(z).$$

Daher ist $\Delta(B)$ nicht identisch gleich Null.

Der Differentialausdruck $G_m(z, x)$ aus (4.) wird nun dargestellt durch das System

$$(19.) \qquad G_{m-k}(z, x) = z', \quad g_k(z', x),$$

wo $G_{m-k}(z, x)$ der Differentialausdruck aus (15.), $g_k(z', x)$ der Differentialausdruck ist

$$(20.) \qquad \frac{d^k z'}{dx^k} + q_1^{(2)} \frac{d^{k-1} z'}{dx^{k-1}} + \cdots + q_k^{(2)} z',$$

worin die Coefficienten $q^{(2)}$ sich rational aus den q (4.), den $q^{(1)}$ (15.) und ihren Ableitungen, demnach rational aus den p (1.), den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen.

III.

In

$$(21.) \qquad F_{m-k}(y, x) = y'$$

(9.) seien für y die Integrale $y_{m-k+s}(s = 1, \ldots, k)$ eingesetzt, welche mit den Integralen y_1 bis y_{m-k} von $F_{m-k}(y, x) = 0$ ein System von m linearunabhängigen Integralen von $F_m(y, x) = 0$ (1.) bilden. Hierdurch ergebe sich

$$(22.) \qquad F_{m-k}(y_{m-k+s}, x) = y_s', \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Die Functionen $y_s'(s = 1, \ldots, k)$ sind k linearunabhängige Integrale der Differentialgleichung $f_k(y', x) = 0$ (11.). Wenn für y in dem Ausdrucke (2.) die Functionen $y_{m-k+s}(s = 1, \ldots, k)$ gesetzt werden, so ergeben sich die Functionen $z_{m-k-s}(s = 1, \ldots, k)$, welche mit den Integralen z_1 bis z_{m-k} von $G_{m-k}(z, x) = 0$

(15.) ein System von m linearunabhängigen Integralen von $G_m(z, x) = 0$ (4.) bilden. In

$$G_{m-k}(z, x) = z' \tag{23.}$$

(19.) seien für z die Integrale $z_{m-k+s}(s = 1, \ldots, k)$ eingesetzt, so ergebe sich

$$G_{m-k}(z_{m-k+s}, x) = z'_s, \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{24.}$$

Die Functionen $z'_s(s = 1, \ldots, k)$ sind k linearunabhängige Integrale der Differentialgleichung $g_k(z', x) = 0$ (20.).

In $G_{m-k}(z, x)$ wird für z der Ausdruck (2.) eingesetzt, so entsteht aus (23.) vermittelst der Differentialgleichung (1.)

$$z' = h_0 y + h_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + h_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}. \tag{25.}$$

Dieser Ausdruck geht vermittelst (21.) über in

$$\left\{ \begin{array}{l} z' = a'_0 y' + a'_1 \dfrac{dy'}{dx} + \cdots + a'_{k-1} \dfrac{d^{k-1} y'}{dx^{k-1}} \\ \quad + l_0 y + l_1 \dfrac{dy}{dx} + \cdots + l_{m-k-1} \dfrac{d^{m-k-1} y}{dx^{m-k-1}}. \end{array} \right. \tag{26.}$$

Die Gleichung (26.) wird erfüllt durch $y = y_\alpha(\alpha = 1, \ldots, m-k)$, $y' = z' = 0$. Daher müssen die Coefficienten l in der aus (26.) durch $y' = z' = 0$ hervorgehenden Differentialgleichung, die höchstens $(m-k-1)$-ter Ordnung wäre, identisch verschwinden. Wird in (25.) $y = y_{m-k+s}(s = 1, \ldots, k)$ eingesetzt, so folgt, dass (26.) durch $z' = z'_s$ (24.) $y' = y'_s$ (22.) erfüllt wird.

Es besteht also der Zusammenhang

$$z' = a'_0 y' + a'_1 \frac{dy'}{dx} + \cdots + a'_{k-1} \frac{d^{k-1} y'}{dx^{k-1}} \tag{27.}$$

zwischen dem Integrale y'_s von $f_k(y', x) = 0$ und z'_s von $g_k(z, x) = 0 (s = 1, \ldots, k)$. Die Coefficienten a' setzen sich rational aus den p (1.), den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammen.

Aus (27.) erfolgt durch Differentiation vermittelst $f_k(y', x) = 0$

$$\frac{d^r z'}{dx^r} = a'^{(r)}_0 y' + a'^{(r)}_1 \frac{dy'}{dx} + \cdots + a'^{(r)}_{k-1} \frac{d^{k-1} y'}{dx^{k-1}}. \tag{28.}$$

Die Determinante der Coefficienten a' aus (27.) und (28.) für $r = 1, \ldots, k-1$ sei durch $D(a')$ bezeichnet, die Determinante der k linearunabhängigen Functionen y'_1 bis y'_k und ihrer $k-1$ ersten Ableitungen durch $D(y')$, die Determinante der k linearunabhängigen Functionen z'_1 bis z'_k und ihrer $k-1$

ersten Ableitungen durch $D(z')$. Dann folgt aus (27.) und (28.) für $r = 1, \ldots, k-1$

$$D(z') = D(a')D(y'). \tag{29.}$$

also ist $D(a')$ nicht identisch gleich Null.

Die Differentialgleichung $f_k(y', x) = 0$ (11.) steht daher zu der Differentialgleichung $g_k(z', x) = 0$ (20.) durch den Zusammenhang (27.) der Integrale in einer Beziehung derselben Art, wie die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ (1.) zu der Differentialgleichung $G_m(z, x) = 0$ (4.) durch den Zusammenhang (2.) der Integrale.

IV.

A) Die Coefficienten p in der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ (1.) und die Coefficienten a in der Relation (2.) seien *rationale Functionen von* x. Dann sind auch die Coefficienten q in der Differentialgleichung $G_m(z, x) = 0$ (4.) rationale Functionen von x.

Ist $F_m(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck, so folgt aus (2.), dass die Integrale z von (4.) auch regulär sind, also ist auch $G_m(z, x)$ ein regulärer Differentialausdruck.

Ist $F_m(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω, so ist $\Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y}, x)$ ein regulärer Differentialausdruck. Die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ sind von der Form $\Omega\bar{y}$, wo $\bar{y}$ ein reguläres Integral ist. Vermöge des Zusammenhanges (2.) werden die Integrale von $G_m(z, x) = 0$ von der Form $\Omega\bar{z}$, wo $\bar{z}$ ein reguläres Integral. Daher ist $\Omega^{-1}G_m(\Omega\bar{z}, x) = 0$ eine reguläre Differerentialgleichung und $G_m(z, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω.

Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ sei durch das System (9.) dargestellt, worin $F_{m-k}(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω. Dann folgt aus dem in II aufgestellten Zusammenhang (12.) zwischen den Integralen von $F_{m-k}(y, x) = 0$ und den Integralen von $G_{m-k}(z, x) = 0$ (15.) nach dem Vorhergehenden, dass auch der Differentialausdruck $G_{m-k}(z, x)$ ein normaler mit demselben determinirenden Factor Ω ist.

Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ ***sei durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt.*** Dann ergiebt sich durch successive Anwendung des Vorhergehenden und der Beziehung (27.), die in III zwischen den Integralen der Differentialgleichungen $f_k'(y', x) = 0$ und $g_k'(z', x) = 0$ nachgewiesen ist:

Der Differentialausdruck $G_m(z, x)$ ist durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, welches ebensoviele Bestandtheile wie das System für $F_m(y, x)$ enthält, und worin jeder Bestandtheil dieselbe Ordnung und denselben determinirenden Factor wie der Bestandtheil in dem Systeme für $F_m(y, x)$ hat, der an derselben Stelle steht.

B) Die Coefficienten p und a in I (1.) (2.) seien ***rationale Ausdrücke von x und einer irreductibelen algebraischen Function s von x*** (die in den p oder a auch fehlen darf). Dann ergiebt sich in derselben Weise, wie in A):

$F_m(y, x)$ (1.) sei durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke (s. No. 1 II) ***darstellbar, so ist $G_m(z, x)$ (4.) ebenfalls durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar, und die beiden Systeme enthalten gleich viele Bestandtheile, die Bestandtheile in den beiden Systemen, die an derselben Stelle stehen, stimmen in Ordnung und determinirendem Factor überein.***

3.

Rückblick auf die in diesem Journal von dem Verfasser veröffentlichten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen.

Es soll im Anschluss an die Uebersicht, welche der Verfasser in Bd. 96 dieses Journals über seine bis dahin erschienenen Abhandlungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen gegeben hat, im Nachstehenden ein Rückblick auf die gesammten von dem Verfasser in diesem Journale veröffentlichten Arbeiten über lineare Differentialgleichungen mit ein- oder mehrwerthigen algebraischen Coefficienten geworfen werden.

I.

In der Einleitung zu der genannten Uebersicht im 96-ten Bande dieses Journals ist hervorgehoben, dass bei den homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten und nur regulären Integralen zur Aufstellung der Integrale bei den *singulären* Punkten keine *speciellen* Convergenzbetrachtungen erforderlich sind, und dass dasselbe von denjenigen homogenen linearen Differentialgleichungen mit *rationalen* Coefficienten gilt, deren Differentialausdruck ***durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist*** (vgl. die hier vorliegende Abhandlung No. 1 IIA).

Es ist (Abh. Bd. 96) auseinandergesetzt, wie sich bei einem gegebenen homogenen linearen Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten ***vermittelst algebraischer Operationen*** ermitteln lässt, ob derselbe durch ein

System normaler Differentialausdrücke dargestellt werden kann, und welches eine solche Darstellung ist. Von einem Differentialausdrucke dieser Art giebt es eine canonische Form der Darstellung.

Die Integrale einer Differentialgleichung mit einem solchen Differentialausdrucke bei den singulären Punkten werden durch Systeme normaler Elementarintegrale gegeben (vgl. Abh. Bd. 96, Einleitung). ***Die Exponenten und die Coefficienten in den Ausdrücken der normalen Elementarintegrale hängen algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zusammen.*** Aus einem Systeme normaler Elementarintegrale erfolgt der Ausdruck der darzustellenden Function vermittelst ***bestimmter Integrale,*** die über die Peripherie des Einheitskreises erstreckt sind, welche dazu dienen, eine unbestimmte Integration, die an einer Function vorzunehmen ist, auszudrücken, wobei diese Function, deren unabhängige Variable mit der Integrations-Variablen multiplicirt ist, wieder unter dem Integralzeichen erscheint. Diese bestimmten Integrale, deren Werthe in den Entwickelungen sich unmittelbar ergeben, treten als Durchgang auf zu den Reihenentwickelungen, zur Werthberechnung mit vorgeschriebener Annäherung und zu den Ausdrücken der Constanten bei der Fortsetzung.

Das bezügliche Verfahren ist an der Differentialgleichung 2-ter Ordnung in Abhandlung des Verfassers Bd. 117 dieses Journals ausführlich auseinandergesetzt. Weitere Zusätze finden sich Bd. 100 über Convergenz und Divergenz der Potenzreihe auf dem Convergenzkreise, Bd. 119 No. 3 in Betreff Aufstellung der Untergruppen in einer Gruppe von Integralen bei einem singulären Punkte, deren Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden und in der vorliegenden Abhandlung No. 2.

II.

Von der Theorie der linearen Differentialgleichungen ist Anwendung gemacht auf die algebraischen Functionen in den Abhandlungen des Verfassers Bd. 104, 108, 112 dieses Journals.

Zu einer beliebigen irreductibelen oder reductibelen algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Functionen einer unabhängigen Variablen als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz der abhängigen Variablen gleich Eins, deren Discriminante nicht identisch verschwindet, gehört eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die Functionszweige, die durch die algebraische Gleichung gegeben sind, genügen, und deren Ordnung mit der Anzahl der linear-

unabhängigen Zweige übereinstimmt. Diese Differentialgleichung ist hergeleitet (Abh. Bd. 104 No. 1 bis 4, Bd. 112 No. 3. 4), die Constanten in den rationalen Coefficienten derselben setzen sich rational aus den Constanten der algebraischen Gleichung zusammen (Abh. Bd. 112 No. 3).

Rational aus der gegebenen (irreductibelen oder reductibelen) algebraischen Function und der unabhängigen Variablen lässt sich eine algebraische Function mit unter einander verschiedenen Zweigen, welche daher wie die gegebene algebraische Function verzweigt ist, herstellen, deren Zweige alle unter einander linearunabhängig sind, und deren Gleichung Constanten enthält, die rational aus den Constanten der ursprünglichen Gleichung hervorgehen (Abh. Bd. 108 No. 2, 4, Bd. 112 No. 1). Für diese hergeleitete algebraische Function wird die vorhin genannte homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten aufgestellt, welcher die Zweige genügen, deren Ordnung mit der Anzahl der Zweige übereinstimmt (l. c.). Dann kann man aus den Wurzeln ihrer Exponentengleichung, welche rationale Zahlen sind, an jeder Stelle, wo Verzweigungen eintreten können, die Ordnungen der Verzweigungen vor Entwickelung der Zweige ersehen. (Abh. Bd. 104 No. 5, Bd. 108 No. 3, Bd. 112 Einleitung.) Durch die Ordnungen der Verzweigungen lässt sich in vielen Fällen direct erkennen, ob die vorgelegte algebraische Function irreductibel ist (Bd. 112 Einleitung), sonst wird um dieses zu ersehen oder das Gleichungspolynom zu zerlegen, das in Abh. Bd. 104 No. 1 beschriebene Verfahren angewandt.

Der Ausdruck der Zweige der ursprünglichen algebraischen Function an einer Stelle, wo die Gleichung mehrfache Wurzeln hat oder bei dem Punkte im Unendlichen wird durch homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten von Integralen der oben genannten zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung, gegeben. Um diese constanten Coefficienten zu bestimmen, sind die Reihenentwickelungen der Zweige bis zu einem bestimmten Gliede vorzunehmen. Diese Reihenentwickelungen werden, da die Ordnungen der Verzweigungen, oder auch die Exponenten der Integrale der genannten Differentialgleichung als rationale Zahlen bekannt sind, unter Anwendung einer hieraus hervorgehenden Substitution für die unabhängige Variable durch ein directes Verfahren aus der algebraischen Gleichung bis zu irgend welchem Gliede erhalten (Abh. Bd. 104 No. 8, Bd. 112 No. 2).

Die zusammenhängenden Zweige sind dann durch eine homogene

lineare Verbindung mit bekannten constanten Coefficienten von Integralen der zugehörigen Differentialgleichung dargestellt. Für die Coefficienten in den Entwickelungen dieser Integrale bestehen fertige Recursionsformeln mit constanter Anzahl der Glieder. Die Constanten in diesen Recursionsformeln setzen sich rational aus dem Punkte, bei dem entwickelt wird, und den Constanten in der ursprünglichen algebraischen Gleichung zusammen (Abh. Bd. 104 No. 6, No. 7; Bd. 112 No. 3). Vermittelst derselben Differentialgleichung ergiebt sich die Fortsetzung der Zweige (Abh. Bd. 104 No. 9).

III.

Die nichthomogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten in dem Differentialausdrucke ist in der Abhandlung des Verfassers Bd. 107 behandelt. Die dort vorkommende Differentialgleichung hat zum Differentialausdruck einen solchen, der durch ein System normaler Differentialausdrücke (vgl. I) darstellbar ist. Der zweite Theil der Differentialgleichung besteht aus einer Summe, von welcher der einzelne Summand das Product zweier Functionen ist, die eine derselben genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Differentialausdruck selbst durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist — dort ist besonders eine algebraische Function in Betracht gezogen — die andere ist eine allenthalben einwerthige analytische Function. Letztere soll selbst ein Product sein, dessen Factoren eine rationale Function und solche einwerthigen Functionen in endlicher Anzahl sind, von denen die einzelne einer bekannten homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und einem einzigen irregulären Punkte genügt, und die Entwickelung derselben bei einem anderen Punkte gegeben ist. Die Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung, welche aus der betrachteten nichthomogenen Differentialgleichung dadurch, dass an Stelle des zweiten Theiles Null gesetzt wird, entsteht, werden durch Systeme normaler Elementarintegrale aufgestellt. Alsdann wird zur Integration der nichthomogenen Differentialgleichung die Methode der successiven Integrationen vermittelst integrirender Factoren angewandt. Der Ausdruck der Integrale erfolgt unter Anwendung der in I genannten bestimmten Integrale und die weitere Untersuchung ist der in I vorkommenden analog.

IV.

Die lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale Ausdrücke der unabhängigen Variablen und einer oder mehrerer irreductibelen

algebraischen Functionen derselben sind, ist in den Abhandlungen des Verfassers Bd. 115, 119, 121 und in der vorliegenden Abhandlung untersucht.

Der Coefficient der höchsten Ableitung in der Differentialgleichung ist immer gleich Eins genommen. In den Gleichungen der algebraischen Functionen mit ganzen rationalen Functionen der unabhängigen Variablen als Coefficienten, kann der Coefficient der höchsten Potenz der Function gleich Eins vorausgesetzt werden. In der Differentialgleichung sollen die Nenner in den rationalen Ausdrücken der Coefficienten, wenn mehrere algebraische Functionen vorkommen, bei keiner Combination der Zweige derselben identisch verschwinden. Diese Coefficienten erhalten alsdann die Form eines Bruches, dessen Zähler eine ganze rationale Function der unabhängigen Variablen und der irreductibelen algebraischen Functionen, dessen Nenner eine ganze rationale Function der unabhängigen Variablen ist. Die singulären Punkte der homogenen linearen Differentialgleichung sind die Werthe der unabhängigen Variablen, für welche die Nenner in den Coefficienten der Differentialgleichung verschwinden, die Punkte, in denen die Discriminanten der Gleichungen der algebraischen Functionen verschwinden und der Punkt im Unendlichen. Durch die singulären Punkte wird in der Ebene der unabhängigen Variablen, diese Ebene als einblättrige Fläche betrachtet, eine sich selbst nicht schneidende in sich zurücklaufende Linie gezogen. An Stelle jedes der beiden hierdurch erhaltenen Gebiete treten dann soviele Blätter, die Bereiche der unabhängigen Variablen sind, als Combinationen von Zweigen der in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen algebraischen Functionen, bezüglich wenn nur eine solche Function vorkommt, als Zweige derselben vorhanden sind, indem dieselben jenen Blättern zugeordnet werden. Innerhalb jedes dieser Bereiche verläuft ein Integral einwerthig und stetig. Von den singulären Punkten im Endlichen aus seien Linien, welche sich selbst und unter einander nicht schneiden, ins Unendliche gezogen. Man kann, wenn mehrere algebraische Functionen in den Coefficienten vorkommen, diejenigen Combinationen der Zweige, welche über diese Linien hinüber unter einander zusammenhängen, ermitteln, indem man die Zweige in einer Combination rational durch die unabhängige Variable und eine andere irreductibele algebraische Function ausdrückt, deren Zweige den verschiedenen und unter einander zusammenhängenden Combinationen entsprechen. Die bezüglichen Ausdrücke sind Abh. Bd. 119 No. 1 aufgestellt; die eingehenden Constanten hängen algebraisch mit den ursprünglichen

Constanten zusammen. Dadurch, dass letztere Ausdrücke in die Coefficienten der Differentialgleichung eingeführt werden, kann man überhaupt jede Combination der Zweige der ursprünglichen algebraischen Functionen in Betracht ziehen, für welche die Nenner in den rationalen Ausdrücken der Coefficienten der Differentialgleichung nicht identisch verschwinden. Auf diese Weise erhält man an Stelle der ursprünglichen Differentialgleichung eine oder mehrere, von denen jede nur eine einzige algebraische Function in den Coefficienten enthält. Die Behandlung des ursprünglichen Falles, wo eine oder mehrere algebraische Functionen in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommen und die Nenner in den Coefficienten bei keiner Combination der Zweige identisch verschwinden, ist jedoch erforderlich, um bei einem Typus von Differentialgleichungen unmittelbar aus den Coefficienten die Regularität der Integrale zu erkennen (Abh. Bd. 115 No. 5). Wenn bei einem einzelnen singulären Punkte — falls das Schema von drei algebraischen Functionen u, v, w betrachtet wird — die Zweige eines λ-blättrigen Windungspunktes bei u, eines μ-blättrigen bei v, eines ν-blättrigen bei w (wobei auch der einblättrige Windungspunkt zugelassen ist) combinirt werden, und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von λ, μ, ν durch R bezeichnet wird, so giebt es $\frac{\lambda\mu\nu}{R}$ Complexe von je R um diesen Punkt unter einander zusammenhängenden Combinationen der Zweige. Die Entwickelungen der Zweige eines Complexes bei dem Punkte a hängen, wenn die unabhängige Variable durch x bezeichnet ist, von $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ ab und sind Potenzreihen dieser Grösse mit positiven ganzzahligen Exponenten. Wird dieselbe Substitution in die Differentialgleichung eingeführt, so ergeben sich deren Coefficienten als einwerthige Functionen von ζ. Es sei ein System linearunabhängiger Integrale letzterer Differentialgleichung bei $\zeta = 0$ aufgestellt, alsdann in dasselbe für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ eingeführt, so erhält man hierdurch für jede der R Combinationen des Complexes ein System linearunabhängiger Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung. Jedes dieser Systeme geht bei einem Umgange um den Punkt $x = a$ in ein folgendes über, ein Endsystem in eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der Integrale des anderen Endsystems (Abh. Bd. 115 No. 3). Wenn nun durch die singulären Punkte eine sich selbst nicht schneidende, in sich zurücklaufende Linie in der Ebene der unabhängigen Variablen, als

einblättriger Fläche, gezogen wird, so ist in einem der beiden hierdurch erhaltenen Gebiete in jedem Blatte, welches einer Combination von Zweigen der algebraischen Functionen entspricht, bei jedem singulären Punkte ein System linearunabhängiger Integrale aufzustellen. Der Uebergang in den Integralen von einem singulären Punkte zu einem anderen in demselben Blatte geschieht analog dem Verfahren in I. (Abh. Bd. 115 No. 3). Durch Zusammensetzung der Substitutionen bei den Umgängen um die singulären Punkte und den Uebergängen von dem einem zu dem anderen dieser Punkte erfolgt die Fortsetzung der Integrale. Bei einer nichthomogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten ist über den zweiten Theil die Voraussetzung aus Abh. Bd. 107 (s. III) gemacht. Es ist alsdann unter Anwendung des Vorhergehenden ein Integral für jede Combination eines Complexes, während der zweite Theil eine und dieselbe Grösse bleibt, aufzustellen (Abh. Bd. 115 No. 4).

Die homogene lineare Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten und nur regulären Integralen wird als solche aus den Coefficienten erkannt (Abh. Bd. 115 No. 5), deren Differentialausdruck heisst ein regulärer. Dieselbe gestattet unter Anpassung der Methoden, die für reguläre lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten gelten, eine directe Behandlung (Abh. Bd. 115 No. 6). Ebenso ist es bei einer nichthomogenen linearen Differentialgleichung mit regulärem Differentialausdrucke, wobei zur Integration die Methode der successiven Integrationen vermittelst integrirender Factoren angewandt ist. (Abh. Bd. 115 No. 7.)

Für die allgemeine Behandlung der linearen Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten ist Folgendes wesentlich. Es soll eine homogene lineare Differentialgleichung vorliegen, deren Coefficienten rationale Ausdrücke der unabhängigen Variablen und einer oder mehrerer irreductibelen algebraischen Functionen sind, und es sollen alle Combinationen der Zweige vorgenommen werden können, ohne dass einer der Nenner in den Coefficienten der Differentialgleichung identisch verschwindet. Wenn alsdann bei jeder in diesen Coefficienten auftretenden Combination der Zweige der algebraischen Functionen ein System linearunabhängiger Integrale der Differentialgleichung aufgestellt wird und aus allen diesen Integralen diejenigen, die unter einander linearunabhängig sind, herausgenommen werden, so erfüllen diese Integrale eine homogene lineare Differentialgleichung, deren Ordnung mit der Anzahl dieser Functionen

übereinstimmt und deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variablen sind, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 (Abh. Bd. 115 No. 8). Die Ordnung dieser Differentialgleichung kann kleiner sein, als das Product aus Ordnung der ursprünglichen Differentialgleichung und Anzahl aller Combinationen der Zweige beträgt (l. c. und Abh. Bd. 119 No. 2). Das Bestehen der rationalen Coefficienten der genannten Differentialgleichung ist in Abh. Bd. 115 No. 8 nachgewiesen, da diese Coefficienten dort unter der Form rationaler Ausdrücke der Zweige der algebraischen Functionen und der unabhängigen Variablen hergeleitet sind. Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich die Darstellung derselben Coefficienten als rationaler Functionen der unabhängigen Variablen, indem nach Abh. Bd. 119 No. 2 die Zweige der algebraischen Functionen rational durch die unabhängige Variable und einen Zweig einer irreductibelen algebraischen Function ausgedrückt werden, deren Gleichung die Monodromiegruppe der zusammen betrachteten algebraischen Functionen bestimmt. Diese homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, deren Integrale die linearunabhängigen Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten sind, welche auf algebraischem Wege aus der ursprünglichen Differentialgleichung hergeleitet wird, ist die *Connexdifferentialgleichung* von der ursprünglichen Differentialgleichung genannt worden (Abh. Bd. 121 No. 1). Die Constanten in den rationalen Coefficienten der Connexdifferentialgleichung sind rationale Ausdrücke der Constanten in der ursprünglichen Differentialgleichung, in den Gleichungen der algebraischen Functionen und in der die Monodromiegruppe dieser Functionen bestimmenden algebraischen Gleichung, welche letzteren Constanten algebraisch mit den Constanten in den Gleichungen der algebraischen Functionen zusammenhängen (Abh. Bd. 119 No. 2).

Die Connexdifferentialgleichung ist in Abh. Bd. 121 zur Untersuchung der Integrale der Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten verwandt worden für den Fall, dass der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung sich als System normaler Differentialausdrücke (vgl. I) darstellen lässt — ein besonderer Unterfall war auch schon in Abh. Bd. 115 No. 9 behandelt. Wenn die oben genannte Substitution $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ eingeführt wird, so stellt sich alsdann der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung bei $\zeta = 0$ als ein System normaler Elementardifferentialausdrücke (vgl. Abh. Bd. 96 No. 3) dar. Dann wird der

Satz nachgewiesen, dass der Differentialausdruck einer homogenen linearen von ζ abhängenden Differentialgleichung mit bei $\zeta = 0$ einwerthigen und in $\zeta = 0$ in endlicher Ordnung unendlichen Coefficienten, deren Integrale die Connexdifferentialgleichung erfüllen — hier betrifft dies die ursprüngliche Differentialgleichung — auch durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke darstellbar ist (Abh. Bd. 121 Nρ. 5). Hierdurch werden aus der ursprünglichen Differentialgleichung die Exponenten der Integrale bekannt. Und nun werden diese Integrale vermittelst der Integrale der Connexdifferentialgleichung mit denselben Exponenten homogen und linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt, diese Constanten werden ermittelt und die Integralausdrücke nach den in I vorkommenden Methoden behandelt (Abh. Bd. 121 No. 6, No. 7). Auch die nichthomogene lineare Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten, über deren zweiten Theil die Voraussetzungen aus III gemacht werden, kann man, wenn bei der Connexdifferentialgleichung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung der Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrucke darstellbar ist, unter Bezugnahme auf die im Vorhergehenden gemachten Angaben integriren. Hierbei kommt die Methode der Variation der Constanten zur Anwendung (Abh. Bd. 121 No. 8). —

Wenn die Constanten in der linearen Differentialgleichung mit ein- oder mehrwerthigen algebraischen Coefficienten und in den übrigen vorgelegten Gleichungen algebraische Zahlen sind, so lassen sich alle angegebenen Operationen ausführen. —

Der Beziehung, welche zwischen der ursprünglichen homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten und der Connexdifferentialgleichung für den Fall besteht, dass der Differentialausdruck letzterer durch ein System normaler Differentialausdrücke sich darstellen lässt, ist in der vorliegenden Abhandlung No. 1 weiter untersucht. Ein homogener linearer Differentialausdruck soll in den Coefficienten rational nebst der unabhängigen Variablen x die irreductibele algebraische Function s enthalten, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Ein solcher Differentialausdruck $\bar{f}(\bar{y}, s, x)$ sei ein regulärer, derselbe ist ein in dem Bereiche s regulärer genannt worden. W sei eine rationale Function von x, welche in Partialbrüche zerlegt zum absoluten Gliede Null hat. Der Differentialausdruck $e^{W}\bar{f}(e^{-W}y, s, x)$ ist ein in dem Bereiche s normaler

Differentialausdruck genannt worden, e^W der determinirende Factor. Aus Differentialausdrücken, welche in dem Bereiche s normal sind, werde ein System gebildet (s. No. 1 IIA). Nun sei $F_m(y, s, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck, welcher die unabhängige Variable x und die irreductibele algebraische Function s rational in den Coefficienten enthält, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Die Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ sei $\Phi_N(y, x) = 0$. Es besteht dann (No. 1) folgender Zusammenhang: Wenn der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, so ist der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar und umgekehrt. Die determinirenden Factoren in dem Systeme für $F_m(y, s, x)$, die unter einander verschieden sind, sind die verschiedenen determinirenden Factoren in dem Systeme für $\Phi_N(y, x)$.

Ein Satz über Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie der Ebene.

(Von Herrn *E. Müller* in Königsberg i. Pr.)

Bei der verhältnissmässig geringen Menge von Sätzen, die uns über Flächen zweiter Ordnung bekannt sind, dürfte vielleicht der folgende Satz einiges Interesse beanspruchen:

I. *„Ist ein Tetraeder einer nicht singulären Fläche zweiter Ordnung eingeschrieben, und projicirt man die Pole dreier seiner Ebenen aus einem in der vierten Ebene liegenden Flächenpunkt auf die Fläche, dann liegen diese Projectionen mit demjenigen Tetraedereckpunkte, durch den die drei ersten Ebenen gehen, in einer Ebene.“*

Zum Zwecke des Beweises mögen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Seitenebenen, a, b, c, d die ihnen gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders und e einen in der Ebene δ liegenden Flächenpunkt bezeichnen. δ schneidet die Fläche 2. O. F in einem Kegelschnitt. Der durch diesen aus d gelegte Kegel enthält die beiden (reellen oder imaginären) Flächenerzeugenden D, D' des Punktes d; die Polarfigur dieses Kegels ist daher ein D und D' berührender Kegelschnitt, dem das durch die Pole a', b', c' von α, β, γ bestimmte Dreiseit umschrieben ist. Dieser Kegelschnitt wird auch von der Polare der Geraden de d. i. von der Schnittlinie der Ebene DD' mit der Tangentialebene des Punktes e berührt. Schneidet diese Gerade D und D' bezüglich in den Punkten m und m', so ist dmm' ein zweites diesem Kegelschnitt umschriebenes Dreiseit. Nach einem bekannten Satze liegen dann die sechs Punkte a', b', c', d, m, m', als Eckpunkte zweier einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiseite, auf einem neuen Kegelschnitt. Nun sind aber em und em', als Verbindungslinien des Punktes e mit denjenigen Punkten, in denen seine Tangentialebene von den Flächenerzeugenden D und D' geschnitten wird, die Flächenerzeugenden des Punktes e. Der aus e durch letzteren Kegel-

schnitt gelegte Kegel schneidet also, weil er die beiden durch seinen Scheitel gehenden Flächenerzeugenden enthält, F in einem durch d gehenden Kegelschnitt. Damit ist der behauptete Satz bewiesen.

Wählt man die Fläche F als Kugel und überträgt die Figur, welche die im Satz I auftretenden Ebenen und Punkte auf der Kugel bestimmen, mittels stereographischer Projection auf eine Ebene, so gelangt man zu folgendem Satze über Kreise einer Ebene:

II. *„Sind in einer Ebene vier beliebige Punkte sammt den vier durch je drei der Punkte legbaren Kreisen gegeben, und wählt man auf einem der Kreise einen beliebigen Punkt, so liegen die ihm bezüglich der drei anderen Kreise invers zugeordneten Punkte mit dem Schnittpunkt dieser drei Kreise auf einem neuen Kreise.“*

Wählt man als einen der vier Punkte den unendlich fernen, so folgt daraus der Satz:

„Ist einem Kreise ein Dreieck eingeschrieben, so liegen die Spiegelbilder irgend eines Kreispunktes in Bezug auf die Dreiecksseiten in einer Geraden“,

der sich mit dem bekannten, angeblich *Simson*schen Satze*) deckt.

Wählt man endlich in Satz II drei der vier Punkte auf einer Geraden und als fünften Punkt den unendlich fernen (der ja auf jeder Geraden der Ebene liegt), so erhält man daraus einen Satz, der sich folgendermassen aussprechen lässt:

„Wählt man auf einer Geraden drei Punkte und legt durch je zwei dieser Punkte und einen beliebigen ausserhalb der Geraden angenommenen Punkt p die drei möglichen Kreise, so liegen deren Mittelpunkte mit p auf einem neuen Kreise.“

Die Gegenpunkte zu p in den drei Kreisen liegen dann natürlich ebenfalls auf einem Kreise. In letzterer Form wurde dieser Satz von *Fabry* angegeben**).

Aus Satz I soll noch ein neuer Satz abgeleitet werden, der sich auf zwei der Fläche F eingeschriebene und einander doppelt umschriebene Tetraeder bezieht. Zu diesem Zwecke denke man sich durch die Ecke d des der Fläche F eingeschriebenen Tetraeders $abcd$ eine vierte Ebene δ'

*) Vergl. *Baltzer*, Elem. d. Math. 2. Bd., IV. B. § 4, 3, Leipzig 1878.

**) Nouvelles Annales, 1889.

gelegt; sie schneidet die Tetraederflächen α, β, γ in drei Geraden, deren Schnittpunkte mit F bezw. a', b', c' heissen sollen. Betrachtet man diese Punkte als Ecken eines $abcd$ umschriebenen Tetraeders, dessen drei übrige Flächen also $a'b'c$, $b'c'a$, $c'a'b$ sind, so liegt deren Schnittpunkt, d. i. der vierte Eckpunkt d' des Tetraeders, in δ*), das Tetraeder $a'b'c'd'$ ist daher $abcd$ sowohl ein- als umgeschrieben. Nach *Steiner***) liegen die Ecken zweier solcher Tetraeder auf drei Flächen zweiter Ordnung oder bilden acht associirte Punkte; jede Fläche zweiter Ordnung, die sieben dieser Punkte enthält, muss also auch den achten enthalten. Demnach liegt d' ebenfalls auf F. d' besitzt jetzt bezüglich der Tetraeder $da'b'c$, $db'c'a$, $dc'a'b$, $dabc$ dieselbe Lage, welche nach Satz I der dort mit e bezeichnete Punkt haben soll. Sucht man daher die Pole der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta'$ und projicirt sie aus d' auf die Fläche F, so müssen diesem Satze zufolge je drei der vier erhaltenen Punkte mit d in einer Ebene liegen, d. h. es liegen alle vier mit d in einer Ebene. Nennt man in der Configuration zweier doppelt umschriebenen Tetraeder *Gegenecken* zwei solche Eckpunkte, die zusammen auf keiner der acht Seitenebenen liegen, so kann man den hiermit bewiesenen Satz folgendermassen aussprechen:

III. *„Liegen die Ecken zweier einander doppelt umschriebenen Tetraeder auf einer Fläche zweiter Ordnung, und projicirt man aus einer der Ecken die Pole der durch die Gegenecke gehenden Ebenen auf die Fläche, so liegen diese Punkte mit der Gegenecke in einer Ebene.“*

Wählt man wieder die Fläche F als Kugel und überträgt die durch obige Tetraederconfiguration auf der Kugel bestimmte Kreisconfiguration durch stereographische Projection auf die Ebene, so erhält man eine bekannte Configuration C von acht Punkten und acht Kreisen, bei der durch jeden Punkt vier Kreise gehen und auf jedem Kreise vier Punkte liegen.†) Dem Satze III entspricht dann in der Ebene der folgende Satz:

IV. *„Sucht man zu einem Punkte der Kreisconfiguration C die inversen Punkte in Bezug auf die vier durch den Gegenpunkt gehenden Kreise, so liegen sie mit dem Gegenpunkte auf einem neuen Kreise.“*

---

*) Vergl. *Möbius* „Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden etc.“ Dieses Journal Bd. III, 1828. Ges. Werke, Bd. I, S. 441.

**) „System. Entwickl.“ No. 58; Ges. Werke, Bd. I, S. 407 Anm.

†) *Möbius* „Theorie der Kreisverwandtschaft.“ Abh. der Sächs. Gesellsch. d. W. Bd. II, 1855. Ges. Werke, Bd. II, S. 314.

Nimmt man insbesondere vier Kreise der Configuration C als Kreise durch den unendlich fernen Punkt u der Ebene d. h. als Geraden an, so sind u und der Schnittpunkt s der vier Kreise, welche den aus den vier Geraden gebildeten Dreiseiten umschrieben werden können, Gegenpunkte. Sucht man nun, dem Satze IV entsprechend, einmal zu u die inversen Punkte, das andere Mal zu s, so erhält man die beiden folgenden von *Steiner**) angeführten Sätze:

„Die Mittelpunkte der Kreise, welche den aus vier Geraden gebildeten Dreiseiten umschrieben werden, liegen mit dem gemeinsamen Punkte s dieser Kreise auf einem neuen Kreis."

„Die Spiegelbilder des Punktes s bezüglich der vier Geraden, mithin auch die Fusspunkte der aus s auf die Geraden gefällten Lothe, liegen in einer Geraden."

Interessant wäre es, zu wissen, ob die den Sätzen I und III entsprechenden Sätze auch für Räume von höherer Dimensionenzahl gelten**).

---

*) „Théorèmes sur le quadrilatère complet", Ges. Werke, Bd. I, S. 223.

**) In einem inzwischen erschienenen Aufsatze von *H. Kühne* „Die Uebertragung eines geometrischen Lehrsatzes", dieses Journal Bd. 119, 1898, wird mittelst Determinantenbetrachtungen der obige Satz über die Kreise, welche den aus vier Geraden gebildeten Dreiseiten umschrieben sind, übertragen auf Räume von gerader Dimensionenzahl. Daraus kann man schliessen, dass das Analogon zu Satz I für Räume *ungerader* Dimensionenzahl Gültigkeit hat.

Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Alf Guldberg* in Christiania.)

In den Untersuchungen über die Theorie der Differentialgleichungen findet man, meines Wissens, nirgends ein allgemeines Princip angegeben, nach welchem man entscheiden kann, wie weit eine gegebene totale Differentialgleichung unbeschränkt integrabel ist oder nicht.

Eine kurze Darstellung eines derartigen Verfahrens dürfte daher vielleicht nicht ohne Interesse sein.

1.

Es sei erstens vorgelegt eine totale Differentialgleichung erster Ordnung in drei Veränderlichen x, y, z:

$$\omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{1.}$$

wo ω homogen in dx, dy, dz ist.

Soll diese totale Differentialgleichung unbeschränkt integrabel sein, d. h., soll z eine Function von x, y und einer Constante c sein, dann ist:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Setzt man diesen Werth für dz in die gegebene Gleichung (1.) ein, so nimmt diese Form:

$$\Sigma P\,dx^{\alpha}\,dy^{\beta} = 0 \qquad (\alpha + \beta = \text{const.})$$

an, wo die P Functionen von x, y, z sind.

Wegen der Unabhängigkeit von dx und dy, müssen sämmtliche Coefficienten dieser Gleichung Null sein.

Die so erhaltenen Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

geben die gesuchten Integrabilitätsbedingungen.

Beispiel I. Es sei gegeben die lineare totale Differentialgleichung:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Substituirt man hier:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so nimmt die Gleichung die Form

$$(P + Rp)\,dx + (Q + Rq)\,dy = 0$$

an.

Setzt man nun die Coefficienten von dx und dy gleich Null, so erhält man:

$$p = -\frac{P}{R}, \quad q = -\frac{Q}{R}.$$

Diese Werthe für p und q in die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

eingesetzt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{R}\right).$$

Führt man die Differentiation aus, so erhält man die bekannte Integrabilitätsbedingung:

$$R\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] + Q\left[\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right] + P\left[\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right] = 0.$$

Beispiel II. Es sei vorgelegt die quadratische totale Differentialgleichung erster Ordnung:

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 + 2D\,dy\,dz + 2E\,dx\,dz + 2F\,dx\,dy = 0,$$

wo die $A, B, \ldots, F$ Functionen von x, y, z sind.

Setzt man hier:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so geht die Gleichung in

$$(A + 2Ep + Cp^2)\,dx^2 + 2(F + Dp + Eq + Cpq)\,dx\,dy + (B + 2Dq + Cq^2)\,dy^2 = 0$$

über.

Die Coefficienten dieser Gleichung gleich Null gesetzt geben:

$$A+2Ep+Cp^2=0, \quad F+Dp+Eq+Cpq=0, \quad B+2Dq+Cq^2=0.$$

Substituirt man die Werthe von p und q aus der ersten und dritten Gleichung in die zweite so erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$ABC+2FED-AD^2-BE^2-F^2C=0.$$

Als zweite Integrabilitätsbedingung erhält man, indem man die Relation

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$$

beachtet

$$\frac{\partial\left[\frac{-E\pm\sqrt{E^2-AC}}{C}\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{-D\pm\sqrt{D^2-BC}}{C}\right]}{\partial x}.$$

2.

Es sei jetzt eine totale Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$\text{(II.)} \qquad \omega(x, y, z, dx, dy, dz, d^2z, \ldots, d^nz)=0$$

vorgelegt, wo ω homogen in $dx, dy, dz, d^2z, \ldots, d^nz$ und d^mz als ein Ausdruck m-ten Grades angesehen ist.

Soll diese Gleichung unbeschränkt integrabel sein, so muss

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

. . . . . .

$$d^nz=\frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n+(n_1)\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+\cdots+\frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n$$

sein, wo $(n_1)\ldots$ die Binominalcoefficienten bedeuten.

Substituirt man diese Werthe für $dz, d^2z, \ldots, d^nz$ in die gegebene Gleichung (II.), so nimmt diese die Form

$$\Sigma P\,dx^\alpha\,dy^\beta=0, \qquad (\alpha+\beta=\text{const.})$$

an.

Die Coefficienten dieser Gleichung müssen nun, wie früher, gleich Null gesetzt werden. Diese Gleichungen in Verbindung mit den Relationen, welche zwischen den Differentialquotienten n-ter Ordnung von z bestehen, geben die gesuchten Integrabilitätsbedingungen.

Beispiel: Es sei gegeben die totale Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + 2D dx dy + 2E dx dz + 2F dy dz + G d^2z = 0.$$

Soll diese Gleichung unbeschränkt integrabel sein, so muss also

$$dz = p dx + q dy,$$
$$d^2z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2$$

sein, wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gesetzt ist.

Substituirt man diese Werthe für dz, d^2z in unsere Gleichung, so nimmt diese die Form

$$[A + 2Ep + Cp^2 + Gr] dx^2 + 2[D + Eq + Fp + Cpq + Gs] dx dy + [B + 2Fq + Cq^2 + Gt] dy^2 = 0$$

an.

Die Coefficienten dieser Gleichung gleich Null gesetzt geben:

$$A + 2Ep + Cp^2 + Gr = 0; \quad B + 2Fq + Cq^2 + Gt = 0; \quad D + Eq + Fp + Cpq + Gs = 0.$$

Substituirt man die sich aus dieser Gleichung ergebenden Werthe für r, s, t in die Gleichungen:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y},$$

so bekommt man:

$$\frac{\partial \left[\frac{A + 2Ep + Cp^2}{G}\right]}{\partial y} = \frac{\partial \left[\frac{D + Eq + Fp + Cpq}{G}\right]}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \left[\frac{B + 2Fq + Cq^2}{G}\right]}{\partial x} = \frac{\partial \left[\frac{D + Eq + Fp + Cpq}{G}\right]}{\partial y}.$$

Führt man die Differentiation aus, und setzt man die Coefficienten der Potenzen von p und q gleich Null, so erhält man folgende Integrabilitätsbedingungen.

$$G\frac{\partial E}{\partial z} - E\frac{\partial G}{\partial z} + C\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial C}{\partial x} = 0,$$
$$G\frac{\partial C}{\partial y} - C\frac{\partial G}{\partial y} + F\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$
$$G\frac{\partial A}{\partial y} - A\frac{\partial G}{\partial y} + D\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial D}{\partial x} = DE - AF,$$

$$G\frac{\partial A}{\partial z}-A\frac{\partial G}{\partial z}+E\frac{\partial G}{\partial x}-G\frac{\partial E}{\partial x}=E^2-AC,$$

$$G\frac{\partial B}{\partial x}-B\frac{\partial G}{\partial x}+D\frac{\partial G}{\partial y}-G\frac{\partial D}{\partial y}=FD-CB,$$

$$G\frac{\partial B}{\partial z}-B\frac{\partial G}{\partial z}+F\frac{\partial G}{\partial y}-G\frac{\partial F}{\partial y}=F^2-CB,$$

$$G\frac{\partial E}{\partial y}-E\frac{\partial G}{\partial y}+F\frac{\partial G}{\partial x}-G\frac{\partial F}{\partial x}+D\frac{\partial G}{\partial z}-G\frac{\partial D}{\partial z}=CD-EF,$$

$$G\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial G}{\partial x}+D\frac{\partial G}{\partial z}-G\frac{\partial D}{\partial z}+E\frac{\partial G}{\partial y}-G\frac{\partial E}{\partial y}=CD-EF.$$

Das hier angedeutete Verfahren lässt sich direct auf eine totale Differentialgleichung n-ter Ordnung von m Veränderlichen generalisiren.

Ueber reductible lineare Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Lothar Heffter* in Bonn.)

Die folgenden Zeilen liefern einen kleinen Beitrag zu der Bedeutung der determinirenden Gleichung einer linearen homogenen Differentialgleichung bei solchen Stellen der unabhängigen Variablen, wo der Grad jener Gleichung niedriger als die Ordnung der Differentialgleichung ist.

I.

Die Differentialgleichung

$$P(x, y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} p_{n-\nu} y^{(\nu)} = 0, \tag{1.}$$

wo die p gewöhnliche Potenzreihen von x sind, die für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwinden, („Normalform“ bei $x = 0$) habe bei $x = 0$ eine determinirende Function vom Grade $\nu \leqq n$ und P sei in „Factoren“ zerlegbar

$$P \equiv Q\big(R(\ldots(Z))\big), \tag{2.}$$

wo $Q, R, \ldots, Z$ bei $x = 0$ ebenfalls Normalform haben. Der Kürze halber sei P in drei Factoren zerlegt

$$P \equiv Q\big(R(S(x, y))\big). \tag{2ª.}$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen von (1.) lässt sich dann zusammensetzen

a) aus einem Fundamentalsystem von $S = 0$;

b) aus je einem Integral der nicht homogenen Gleichungen

$$S = y_R,$$

wo für y_R successive die Elemente eines Fundamentalsystems von $R = 0$ zu setzen sind;

c) aus je einem Integral der Gleichungen

$$R(S) = y_Q,$$

wo für y_Q successive die Elemente eines Fundamentalsystems von $Q = 0$ zu setzen sind.

Jedes der unter a), b), c) aufgezählten Integrale ist in der Form darstellbar

$$y_P \equiv x^\lambda(\varphi_0 + \varphi_1 \log x + \cdots + \varphi_\varkappa \log^\varkappa x),$$

wo die φ positive und negative, aber keine gebrochenen, sondern nur *ganze* Potenzen von x enthalten. Wir wollen sagen, dass die multiplicative Vieldeutigkeit von y_P bei $x = 0$ durch λ bestimmt werde. Dann ist klar, dass die unter b) aufgezählten Integrale dieselbe multiplicative Vieldeutigkeit besitzen wie y_R, die unter c) dieselbe wie y_Q. Hat nun eine der Differentialgleichungen

$$Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0$$

in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, wo also der Grad der determinirenden Function mit der Ordnung der Differentialgleichung übereinstimmt, so wird die multiplicative Vieldeutigkeit ihrer Integrale gegeben durch die Wurzeln ihrer determinirenden Gleichung, folglich auch die multiplicative Vieldeutigkeit der entsprechenden Integrale von $P = 0$ selbst.

Diese naheliegende Bemerkung sprechen wir, nur um nachher davon Gebrauch zu machen und, weil es sonst noch nicht geschehen zu sein scheint, als besonderen Satz aus:

Wenn der Differerentialausdruck P sich bei $x = 0$ zerlegen lässt in:

$$P \equiv Q\big(R(\ldots(Z))\big)$$

und dem entsprechend die determinirende Function von P in

$$\mathfrak{p}(\lambda) \equiv \mathfrak{q}(\lambda) \cdot \mathfrak{r}(\lambda) \ldots \mathfrak{z}(\lambda),$$

wenn ferner ein bei jener Zerlegung auftretender Differentialausdruck S bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat mit der determinirenden Function $\mathfrak{f}(\lambda)$, so entspricht jeder Wurzel von $\mathfrak{f}(\lambda) = 0$ eine Wurzel ω der zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung von $P = 0$ durch die Relation

$$\omega = e^{2\pi i \lambda}.$$

Liegt nun z. B. der Fall vor, dass bei

$$P \equiv Q(R(S))$$

S in $x = 0$ keine Stelle der Bestimmtheit hat, wohl aber R, so *divergirt* zwar die zu einer Wurzel von $\mathfrak{r}(\lambda) = 0$ gehörige, formal bestimmbare Reihe, aber ihr Anfangsexponent, eben jene Wurzel von $\mathfrak{r}(\lambda) = 0$, giebt dennoch

nach unserem Satze die multiplicative Vieldeutigkeit eines Integrals oder mit anderen Worten eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung. Hiernach empfiehlt es sich, eine von Herrn *Thomé* mehrfach ausgesprochene Bemerkung*) ausdrücklich auf den Fall der Irreductibilität der vorliegenden Differentialgleichung bei der betrachteten Stelle einzuschränken, was ja vielleicht auch als stillschweigende Voraussetzung jener Bemerkung zu Grunde lag.

II.

Wenn man mehrere lineare Differentialausdrücke

$$Q, R, S, \ldots,$$

deren Coefficienten sich bei $x = 0$ rational verhalten und die sämmtlich in der Normalform gegeben sein sollen, zusammensetzt, so ist die determinirende Function des zusammengesetzten Differentialausdruckes

$$P \equiv Q(R(S\ldots))$$

bekanntlich das Product der determinirenden Functionen von $Q, R, S, \ldots$ Hat umgekehrt ein Differentialausdruck P in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, so ist er stets in n Differentialausdrücke erster Ordnung, die in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit haben, zerlegbar. Andererseits sind bisher als bei einer Stelle *irreductibel* nachgewiesen nur Differentialgleichungen, die daselbst eine determinirende Function 0-ten Grades haben**). Deshalb ist die Frage nicht uninteressant, ob etwa jede Differentialgleichung, deren determinirende Function keine Constante ist, reductibel ist, oder ob es auch irreductibele lineare Differentialausdrücke mit nicht constanter determinirender Function giebt. Ich glaube umsomehr auf diese Frage eingehen zu sollen, als ich bei früherer Gelegenheit†) die Vermuthung wenigstens angedeutet habe, dass das Erstere der Fall sein dürfte, und diese Bemerkung bisher keinen Widerspruch gefunden zu haben scheint. Man kann aber mit Hülfe des Satzes aus No. I leicht zeigen, dass es auch bei $x = 0$ irreductibele Differentialgleichungen mit nicht constanter determinirender Function giebt.

Aehnlich wie Herr *Thomé* für seinen oben genannten Zweck (a. a. O.) benutzen wir als Beispiel eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^3 y'' + x\left(1 + \frac{11}{6}x\right)y' + \frac{1}{6}xy = 0, \tag{3.}$$

*) Vergl. z. B. dieses Journ. Bd. 101 (1887), S. 203.

**) Vergl. *Frobenius,* dieses Journ. Bd. 80 (1875), S. 332, 333.

†) Einleitung in die Theorie der lin. Diffgl. etc., Leipzig, *Teubner,* 1894, S. 196, Anmerkung.

die ausser $x = 0$ und $x = \infty$ keine singulären Stellen hat. Zu $x = \infty$ gehört die determinirende Gleichung

$$r(r-1)+\frac{1}{6}r+\frac{1}{6} = 0$$

mit den Wurzeln $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{3}$,

zu $x = 0$ die determinirende Gleichung ersten Grades

$$s = 0$$

mit der einzigen Wurzel $s = 0$. $x = \infty$ ist Stelle der Bestimmtheit, und da ausser $x = 0$ keine anderen singulären Stellen vorhanden sind, so gelten die Entwickelungen

$$(4.) \qquad y_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} P_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad y_2 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} P_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo P_1 und P_2 gewöhnliche Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ mit nicht verschwindendem Anfangsgliede sind, auch noch in der Umgebung von $x = 0$. Jedes Integral ist eine lineare homogene Verbindung von y_1, y_2; folglich kann es kein in der Umgebung von $x = 0$ *eindeutiges* Integral geben und daher ist Differentialgleichung (3.) bei $x = 0$ *irreductibel.* Denn, wenn sie in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegbar wäre, so hätte einer der beiden Differentialausdrücke, entweder der innere oder der äussere, bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit und es müsste nach dem Satze aus No. I jedenfalls *ein* bei $x = 0$ eindeutiges Integral existiren.

Wir haben also das Resultat:

Es giebt lineare Differentialgleichungen, die bei einer Stelle irreductibel sind und deren determinirende Function keine Constante ist.

Zusatz zu der Arbeit „Ueber *Abel*sche Gruppen“ (Bd. 119 d. J. S. 261ff.).

S. 266 bei Formel (A.) ist als Anmerkung anzufügen:

„Diese Formel ist in Uebereinstimmung mit einem Satze, der zuerst von den Herren ***Frobenius*** und ***Stickelberger*** (d. J. Bd. 86 (1878) S. 245, XI.) und neuerdings von Herrn ***K. Zsigmondy*** in der Abhandlung „Beiträge zur Theorie der *Abel*schen Gruppen und ihrer Anwendungen auf die Zahlentheorie“ (Monatshefte für Mathematik und Physik, Jahrg. VII, 1896) bewiesen worden ist.“

Zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung adjungirten Differentialgleichungen.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Nikolsburg.)

1.

Im 115. Bde. d. J. ist gezeigt worden, wie die Gleichungen der zu

$$(1.)\qquad P(y)=\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n y=0$$

gehörigen n Adjungirten aus den Definitionsgleichungen derselben:

$$(2.)\qquad \begin{cases} u=p_{n-k}z-\dfrac{d}{dx}(p_{n-k-1}z)+\cdots+(-1)^{n-k}\dfrac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}}, \\ \dfrac{d^k u}{dx^k}=\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(p_{n-k+1}z)-\dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(p_{n-k+2}z)+\cdots+(-1)^{k-1}(p_n z) \end{cases}$$

durch allmähliche Elimination von z abgeleitet werden können.

Ein anderes Verfahren, um diese Gleichungen zu erhalten, ist folgendes:

Man differentiire die erste der Gleichungen (2.) $(k-1)$-mal und die zweite $(n-k)$-mal, so erhält man Ausdrücke für

$$u,\quad \frac{du}{dx},\quad \frac{d^2u}{dx^2},\ \cdots,\ \frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}$$

in der Form

$$(3.)\qquad \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}=a_\lambda z^{(n-k+\lambda)}+b_\lambda z^{(n-k+\lambda-1)}+\cdots+g_\lambda z$$

$$(\lambda=0,1,\ldots,k-1)$$

und für

$$\frac{d^k u}{dx^k},\quad \frac{d^{k+1}u}{dx^{k+1}},\ \cdots,\ \frac{d^n u}{dx^n}$$

Ausdrücke von der Form

$$(4.)\qquad \frac{d^{k+\lambda}u}{dx^{k+\lambda}}=\mathfrak{a}_\lambda z^{(k-1+\lambda)}+\mathfrak{b}_\lambda z^{(k-2+\lambda)}+\cdots+\mathfrak{f}_\lambda z$$

$$(\lambda=0,1,\ldots,n-k).$$

Die Differentialgleichung der k-ten Adjungirten geht dann aus den $n+1$ Gleichungen (3.) und (4.) unmittelbar hervor, wenn man aus denselben die n Grössen $z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}$ eliminirt.

Diese Bildungsregel gilt für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$. Für $k = n$ insbesondere lauten die Gleichungen (2.):

$$u_{(n)} = z,$$
$$\frac{d^n u_{(n)}}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 z) + \cdots + (-1)^{n-1}(p_n z).$$

Der Vorschrift gemäss ist die erste dieser Gleichungen $(n-1)$-mal, die zweite 0-mal zu differentiiren, was darauf hinauskommt, in letzterer Gleichung z und die $n-1$ ersten Ableitungen von z durch $u_{(n)}, \frac{du_{(n)}}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}u_{(n)}}{dx^{n-1}}$ zu ersetzen.

Nach dem angegebenen Verfahren erhält man z. B. für $n = 3$ die Gleichung der Adjungirten der ersten Zeile in der Form:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^3u}{dx^3} & p_3 & 2p_3' & p_3'' \\ \frac{d^2u}{dx^2} & 0 & p_3 & p_3' \\ \frac{du}{dx} & 0 & 0 & p_3 \\ u & 1 & -p_1 & p_2 - p_1' \end{vmatrix} = 0$$

und diejenige der Adjungirten der zweiten Zeile:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^3u}{dx^3} & p_2 & 2p_2' - p_3 & p_2'' - p_3' \\ \frac{d^2u}{dx^2} & 0 & p_2 & p_2' - p_3 \\ \frac{du}{dx} & 1 & -p_1 & -p_1' \\ u & 0 & 1 & -p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.

Mittels der Gleichungen (2.) lassen sich auch die Werthe der Determinantenproducte:

(5.) $$D(u_{(k)_1}, u_{(k)_2}, \ldots, u_{(k)_n}) \cdot D(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$, ausgedrückt in Function der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$, unmittelbar berechnen*). Dies geschieht, indem man für die $u_{(k)}$ und deren

*) Vergl. d. J. Bd. 115.

Derivirte die Ausdrücke (3.) und (4.) in den Determinanten $D(u_{(k)_1}, \ldots, u_{(k)_n})$ substituirt. Diese letzteren können dann als Product zweier Factoren dargestellt werden, deren einer die Determinante $D(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ und deren anderer eine Determinante ist, die sich als ganze rationale Function von $p_1, \ldots, p_n$ und deren Ableitungen darstellt. Und da (*Frobenius*, d. J. Bd. 77)

$$(6.) \qquad D(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

ist, so erscheint damit auch das Determinantenproduct (5.) als ganze rationale Function der Coefficienten p_i und deren Ableitungen ausgedrückt.

Für die Adjungirte $u_{(1)}$ der ersten Zeile lässt sich diese Berechnung am kürzesten ausführen. Für diese lauten die Gleichungen (2.):

$$(7.) \qquad \begin{cases} u = p_{n-1} z - \dfrac{d}{dx}(p_{n-2} z) + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \\ \dfrac{du}{dx} = p_n z. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen wird auf die Form gebracht:

$$u = (-1)^{n-1} z^{(n-1)} + a_{n-2} z^{(n-2)} + \cdots + a_1 z^{(1)} + a_0 z$$

aus der zweiten erhält man durch Differentiation die Werthe für $u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots, u^{(n-1)}$; werden dieselben nebst den vorstehenden für u und $u^{(1)}$ in $D(u_{(1)_1}, \ldots, u_{(1)_n})$ eingesetzt, so zerfällt letztere Determinante in das Product der Determinante:

$$\begin{vmatrix} z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1' & z_2' & \ldots & z_n' \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

und

$$(8.) \qquad \begin{vmatrix} (-1)^{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_n & p_n' \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_n & 2p_n' & p_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & p_n & \ldots & (n-3)_2 p_n^{(n-5)} & (n-3)_1 p_n^{(n-4)} & p_n^{(n-3)} \\ 0 & p_n & (n-2)_1 p_n' & \ldots & (n-2)_2 p_n^{(n-4)} & (n-2)_1 p_n^{(n-3)} & p_n^{(n-2)} \end{vmatrix};$$

die letztere Determinante reducirt sich auf das Product ihres Anfangsgliedes und der zu diesem gehörigen Adjuncten, in dieser aber sind alle Glieder

der einen Diagonale gleich p_n und alle auf der einen Seite dieser Diagonale stehenden Glieder gleich Null, die Determinante (8.) ist daher gleich:

$$(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}p_n^{n-1},$$

und wegen

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}=(-1)^{n(n-1)}=1$$

ist dann

$$D(u_{(1)_1}, u_{(1)_2}, \ldots, u_{(1)_n}) = D(z_1, z_2, \ldots, z_n)\cdot p_n^{n-1}$$

oder zufolge (6.):

$$D(u_{(1)_1}, u_{(1)_2}, \ldots, u_{(1)_n})\cdot D(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_n^{n-1}, \tag{9.}$$

wie auf anderem Wege im 115. Bde. d. J. gefunden wurde.

Um die Anwendbarkeit dieses Verfahrens für die anderen Adjungirten zu zeigen, mag z. B. $n=3$, $k=2$ angenommen werden. Für diesen Fall ist

$$D(u_{(2)_1}, u_{(2)_2}, u_{(2)_3}) = \begin{vmatrix} -z_1'+p_1z_1 & -z_2'+p_1z_2 & -z_3'+p_1z_3 \\ -z_1''+p_1z_1'+p_1'z_1 & -z_2''+p_1z_2'+p_1'z_2 & -z_3''+p_1z_3'+p_1'z_3 \\ p_2z_1'+(p_2'-p_3)z_1 & p_2z_2'+(p_2'-p_3)z_2 & p_2z_3'+(p_2'-p_3)z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1'' & z_2'' & z_3'' \\ z_1' & z_2' & z_3' \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & p_1 \\ -1 & p_1 & p_1' \\ 0 & p_2 & p_2'-p_3 \end{vmatrix}$$

$$= D(z_1, z_2, z_3)(p_1p_2+p_2'-p_3)$$

daher

$$D(u_{(2)_1}, u_{(2)_2}, u_{(2)_3})\cdot D(y_1, y_2, y_3) = p_1p_2-p_3+p_2'$$

(vergl. d. J. Bd. 115, S. 337).

Für $n=4$ und $k=2$ ergiebt sich ferner:

$$D(u_{(2)_1}, \ldots, u_{(2)_4}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -p_1 & p_2-p_1' \\ 1 & -p_1 & p_2-p_1' & p_2' \\ 0 & 0 & p_3 & p_3'-p_4 \\ 0 & p_3 & 2p_3'-p_4 & p_3''-p_4 \end{vmatrix} \cdot D(z_1, \ldots, z_4),$$

woraus

$$D(u_{(2)_1}, \ldots, u_{(2)_4})\cdot D(y_1, \ldots, y_4) =$$

$$(p_4'-p_3'')p_3+(p_3'-p_4)(2p_3'-p_4)-p_3[(p_4-p_3')p_1-p_3(p_2-p_1')]$$

sich ergiebt.

Für $n = 4$ und $k = 3$ endlich ist:

$$D(u_{(3)_1}, \ldots, u_{(3)_4}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & p_1 \\ 0 & -1 & p_1 & p_1' \\ -1 & p_1 & 2p_1' & p_1'' \\ 0 & p_2 & 2p_2'-p_3 & p_2''-p_3'+p_4 \end{vmatrix} \cdot D(z_1, \ldots, z_4),$$

woraus folgt:

$$D(u_{(3)_1}, \ldots, u_{(3)_4}) \cdot D(y_1, \ldots, y_4) =$$
$$p_1(p_1p_2-p_3+2p_2')+p_1''p_2+(p_2''-p_3'+p_4).$$

3.

Aus den zwei Gleichungen (7.) ergiebt sich die Differentialgleichung der ersten Adjungirten, wenn für z der aus der zweiten folgende Werth:

$$(10.) \qquad z = \frac{1}{p_n}\frac{du}{dx}$$

in die erste gesetzt wird. Dieselbe hat die Form:

$$(11.) \quad \begin{cases} Q_1(u_{(1)}) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{p_n}\frac{du}{dx}\right) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{p_1}{p_n}\frac{du}{dx}\right) + \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\frac{p_2}{p_n}\frac{du}{dx}\right) - \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{du}{dx}\right) + (-1)^n u = 0. \end{cases}$$

Wird aber umgekehrt der Werth für u aus der ersten Gleichung (7.) in die zweite gesetzt, so ergiebt sich die Differentialgleichung der n-ten Adjungirten:

$$(12.) \quad Q_n(u_{(n)}) = P_1(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 z) - \cdots + (-1)^n p_n z = 0.$$

Durch Differentiation der Gleichung (11.) ergiebt sich:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{p_n}\frac{du}{dx}\right) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{p_1}{p_n}\frac{du}{dx}\right) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{du}{dx}\right) + (-1)^n\frac{du}{dx} = 0,$$

letztere Gleichung aber ist gemäss (10.) identisch mit der Gleichung (12.). Hieraus folgt:

Die Differentialgleichung der n-ten Adjungirten geht aus derjenigen der ersten Adjungirten dadurch hervor, dass letztere einmal differentiirt wird, d. h. es ist:

$$\frac{d}{dx}Q_1(u_{(1)}) = P_1\left(\frac{1}{p_n}\frac{du_{(1)}}{dx}\right) = P_1(z).$$

Der Coefficient der n-ten Ableitung in der Differentialgleichung (11.)

ist $\frac{1}{p_n}$, daher hat diese Gleichung, wenn man sie mit p_n multiplicirt, die Form:

$$(11'.) \qquad \frac{d^n u}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + q_{n-1} \frac{du}{dx} + (-1)^n p_n u = 0,$$

es ist demnach der Coefficient von u in dieser Gleichung derselbe wie der Coefficient von z in der Gleichung (12.). Werden diese Coefficienten mit q_n und r_n bezeichnet, so ist also:

$$(13.) \qquad q_n = r_n = (-1)^n p_n \text{*}).$$

Wegen

$$(13'.) \qquad p_n = (-1)^n \cdot \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

(d. J. Bd. 115, S. 332) ist auch:

$$q_n = (-1)^n \cdot \frac{D(u_1', u_2', \ldots, u_n')}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}, \quad r_n = (-1)^n \frac{D(z_1', z_2', \ldots, z_n')}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)},$$

wo der Kürze wegen u_i statt $u_{(1)_i}$ geschrieben ist. Aus (13.) ergiebt sich daher, dass einerseits:

$$(14.) \qquad \frac{D(u_1', u_2', \ldots, u_n')}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \frac{D(z_1', z_2', \ldots, z_n')}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = p_n$$

und andererseits:

$$(15.) \qquad \frac{D(u_1', u_2', \ldots, u_n')}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = (-1)^n \cdot \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

$$(16.) \qquad \frac{D(z_1', z_2', \ldots, z_n')}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = (-1)^n \cdot \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

ist.

Aus (16.) ergiebt sich zufolge (6.) die weitere Relation:

$$(17.) \qquad D(z_1', z_2', \ldots, z_n') = (-1)^n \cdot \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^2}$$

und aus (15.) mittels der Gleichung (9.):

$$(18.) \qquad D(u_1', u_2', \ldots, u_n') = (-1)^n \cdot \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^2} \cdot p_n^{n-1}.$$

Durch Division von (18.) und (17.) folgt noch, dass

$$D(u_1', u_2', \ldots, u_n') = D(z_1', z_2', \ldots, z_n') \cdot p_n^{n-1}$$

ist.

Zu den vorstehenden Relationen kann man auch auf andere Weise gelangen, wenn man den von Herrn *Frobenius* (d. J. Bd. 77) abgeleiteten

---

*) Auf die Relation $q_n = (-1)^n p_n$ hat schon Herr *Gutzmer* (Habilitationschrift, Halle a. S. 1896, S. 14) aufmerksam gemacht.

Satz anwendet, dass für eine beliebige Function f von x die Gleichung stattfindet:

$$D(fy_1, fy_2, \ldots, fy_i) = f^i \cdot D(y_1, y_2, \ldots, y_i), \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{19.}$$

Zufolge (10.) ist nämlich

$$z_i = \frac{1}{p_n} u_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10'.}$$

also $D(z_1, z_2, \ldots, z_n) = D(p_n^{-1}u_1', p_n^{-1}u_2', \ldots, p_n^{-1}u_n')$, woraus gemäss der Formel (19.)

$$p_n^n D(z_1, \ldots, z_n) = D(u_1', \ldots, u_n') \tag{19'.}$$

und zufolge (6.)

$$D(u_1', \ldots, u_n') \cdot D(y_1, \ldots, y_n) = p_n^n \tag{20.}$$

folgt. Durch Division von (20.) und (9.) ergiebt sich:

$$\frac{D(u_1', \ldots, u_n')}{D(u_1, \ldots, u_n)} = p_n,$$

übereinstimmend mit der Formel (14.).

Wird ferner in (20.) für p_n der Werth aus (13'.) gesetzt, so hat man:

$$D(u_1', \ldots, u_n') = (-1)^n \frac{D(y_1', \ldots, y_n')^n}{D(y_1, \ldots, y_n)^{n+1}}, \tag{21.}$$

während bekanntlich (d. J. Bd. 115, S. 332):

$$D(u_1, \ldots, u_n) = \frac{D(y_1', \ldots, y_n')^{n-1}}{D(y_1, \ldots, y_n)^n} \tag{22.}$$

ist. Durch Division von (21.) und (22.) folgt:

$$\frac{D(u_1', \ldots, u_n')}{D(u_1, \ldots, u_n)} = (-1)^n \frac{D(y_1', \ldots, y_n')}{D(y_1, \ldots, y_n)},$$

übereinstimmend mit der Formel (15.)

Durch Anwendung der Formel (19.) erhält man übrigens noch die Beziehung:

$$D(u_1', u_2', \ldots, u_i') = p_n^i(z_1, z_2, \ldots, z_i),$$

die für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt, und aus der für $i = n$ die Gleichung (19'.) und für $i = 1$ die Gleichung (10'.) hervorgeht.

4.

Wenn die Differentialgleichung n-ter Ordnung $P(y) = 0$ mit einer $(n-1)$-ter Ordnung

$$Q(y) = y^{(n-1)} + q_1 y^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} y = 0$$

alle Integrale gemeinsam hat, so ist (*Frobenius*, d. J. Bd. 76, S. 250):

$$(23.) \qquad P(y) = \frac{d}{dx} Q(y) + r\,Q(y).$$

Wird $r = \frac{d\log z}{dx} = \frac{z'}{z}$ und

$$(24.) \qquad z q_1 = \zeta_{n-1}, \quad z q_2 = \zeta_{n-2}, \ldots, z q_{n-1} = \zeta_1$$

gesetzt, so verwandelt sich die Identität (23.) in

$$(23'.) \qquad z P(y) = \frac{d}{dx}\left\{z y^{(n-1)} + \zeta_{n-1} y^{(n-2)} + \cdots + \zeta_1 y\right\},$$

woraus folgt, dass die Grösse z integrirender Factor von $P(y) = 0$ ist; andererseits ergiebt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleich hohen Ableitungen von y in (23'.) das Gleichungssystem:

$$(25.) \qquad \begin{cases} z p_1 &= \frac{dz}{dx} + \zeta_{n-1}, \\ z p_2 &= \frac{d\zeta_{n-1}}{dx} + \zeta_{n-2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z p_{n-1} &= \frac{d\zeta_2}{dx} + \zeta_1, \\ z p_n &= \frac{d\zeta_1}{dx}, \end{cases}$$

woraus für ζ_k der Werth hervorgeht:

$$\zeta_k = p_{n-k} z - \frac{d}{dx}(p_{n-k-1} z) + \cdots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k} z}{d x^{n-k}},$$

welcher gemäss der ersten der Gleichungen (2.) mit dem Werthe für die Adjungirte der k-ten Zeile $u_{(k)}$ übereinstimmt, es ist also:

$$\zeta_1 = u_{(1)}, \quad \zeta_2 = u_{(2)}, \ldots, \zeta_{n-1} = u_{(n-1)}, \quad z = u_{(n)},$$

wie denn auch das Gleichungssystem (25.) identisch ist mit demjenigen, dem die $u_{(k)}$ genügen (d. J. Bd. 117, S. 274). Zufolge (24.) ist daher:

$$(26.) \qquad q_1 = \frac{u_{(n-1)}}{u_{(n)}}, \quad q_2 = \frac{u_{(n-2)}}{u_{(n)}}, \ldots, q_{n-1} = \frac{u_{(1)}}{u_{(n)}}.$$

Es gilt also der Satz:

> Die Coefficienten derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung $Q(y) = 0$, mit welcher $P(y) = 0$ alle Integrale gemeinsam hat, werden erhalten, indem man die zu $P(y) = 0$ gehörigen Adjungirten der $(n-1)$-ten, $(n-2)$-ten, ..., 1-ten Zeile durch die Adjungirte der n-ten Zeile dividirt.

(Vergl. d. J. Bd. 115, S. 329).

Zu diesem Ergebnisse kann man auch auf folgende Weise gelangen: Zwischen dem Lösungssysteme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von $P(y) = 0$ und dem dazugehörigen Lösungssystem $u_{(k)_1}, u_{(k)_2}, \ldots, u_{(k)_n}$ der Adjungirten der k-ten Zeile finden, wie aus der Definition letzterer unmittelbar hervorgeht, die Beziehungen statt:

$$(27.)\quad \begin{cases} y_1 u_{(k)_1} + y_2 u_{(k)_2} + \cdots + y_n u_{(k)_n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(k-2)} u_{(k)_1} + y_2^{(k-2)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(k-2)} u_{(k)_n} = 0, \\ y_1^{(k-1)} u_{(k)_1} + y_2^{(k-1)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(k-1)} u_{(k)_n} = 1, \\ y_1^{(k)} u_{(k)_1} + y_2^{(k)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(k)} u_{(k)_n} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n-1)} u_{(k)_1} + y_2^{(n-1)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(n-1)} u_{(k)_n} = 0. \end{cases}$$

Es sei nun

$$Q(y) = y^{(n-1)} + q_1 y^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} y = 0$$

diejenige Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung, der die $n-1$ Integrale $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ genügen. Multiplicirt man die Gleichungen (27.) beziehungsweise mit $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_1, 1$ und addirt dieselben hierauf, so ergiebt sich:

$$u_{(k)_i} \cdot Q(y_i) = q_{n-k}.$$

Es ist aber (*Frobenius*, d. J. Bd. 76, S. 266)

$$\frac{1}{Q(y_i)} = z_i$$

ein Multiplicator von $P(y) = 0$, somit ist

$$\frac{u_{(k)_i}}{z_i} = q_{n-k}$$

für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$, woraus für $k = 1, \ldots, n$ folgt:

$$\frac{u_{(1)}}{z} = q_{n-1}, \quad \frac{u_{(2)}}{z} = q_{n-2}, \quad \ldots, \quad \frac{u_{(n-1)}}{z} = q_1,$$

übereinstimmend mit (26.).

5.

Hat die Diffentialgleichung $P(y) = 0$ mit einer anderen ebenso beschaffenen Differentialgleichung λ-ter Ordnung ($\lambda < n$) alle Integrale gemeinsam, so hat, wie Herr *Frobenius* auf verschiedene Arten gezeigt hat (d. J. Bd. 76) die Differentialgleichung $P_1(z) = 0$, welcher die Adjungirte der n-ten Zeile $z = u_{(n)}$ genügt, mit einer linearen Differentialgleichung $(n-\lambda)$-ter

Ordnung alle Integrale gemeinsam. Da aber, wenn z schon eine Differentialgleichung von niedrigerer als der n-ten Ordnung befriedigt, jeder mit z gebildete homogene lineare Differentialausdruck gleichfalls einer linearen Differentialgleichung derselben Ordnung genügt, so folgt aus den Ausdrücken (2.) für die Adjungirten der 1., 2., ..., $(n-1)$-ten Zeile, dass jede derselben gleichzeitig mit z je einer linearen Differentialgleichung $(n-\lambda)$-ter Ordnung genügt. Daher gilt der Satz:

> Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung $P(y)=0$ und alle ihr adjungirten n Differentialgleichungen:
>
> $$Q_k(u_k)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$
>
> sind gleichzeitig reductibel oder irreductibel.

Dass die Differentialgleichung $Q_{(k)}(u_{(k)})=0$ der Adjungirten der k-ten Zeile mit einer Differentialgleichung $(n-\lambda)$-ter alle Integrale gemeinsam hat, sobald $P(y)=0$ mit einer Differentialgleichung λ-ter Ordnung alle Integrale gemeinsam hat, lässt sich übrigens auch aus dem Gleichungssysteme (27.) auf dieselbe Weise ableiten, wie Herr ***Frobenius*** aus demselben Gleichungssysteme für $k=n$ den Anfangs dieser Nummer angeführten Satz bewiesen hat (d. J. Bd. 76, S. 266—268).

Als Beispiel mag die ***Riemann***sche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(28.)\quad \begin{cases} x^2(1-x)^2y''-[(\alpha+\alpha'-1)+(\beta+\beta'+1)x]x(1-x)y' \\ \qquad +[\alpha\alpha'+(\gamma\gamma'-\alpha\alpha'-\beta\beta')x+\beta\beta'x^2]y=0 \end{cases}$$

angeführt werden. Damit diese Gleichung reductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Summe dreier Exponenten, unter denen sich von jedem singulären Punkte einer befindet, gleich einer ganzen Zahl sei (***Frobenius***, d. J. Bd. 76, S. 254—256). Da aber (d. J. Bd. 117, S. 376) die Wurzeln der zu den adjungirten Differentialgleichungen $Q_k(u_{(k)})=0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von den entsprechenden Wurzeln der zu $P(y)=0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, so ergiebt sich sofort, dass die beiden zur Gleichung (28.) adjungirten Differentialgleichungen mit dieser selbst reductibel sind oder nicht.

Ueber Scharen reeller quadratischer und *Hermite*scher Formen.

(Von Herrn *Alfred Loewy* in Freiburg i. B.)

Den von *Weierstrass*[1]) stammenden Satz: „Wenn die Determinante einer Schar reeller quadratischer Formen einen complexen oder mehrfachen Elementartheiler besitzt, so enthält die Schar keine definite quadratische Form“ hat Herr *Gundelfinger* in den Supplementen zu *Otto Hesses*[2]) Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes derartig verallgemeinert, dass er auch für semidefinite quadratische Formen gilt. Ebenso wie der von *Weierstrass* für definite quadratische Formen formulirte Satz nur als der erste und einfachste Fall in einer ganzen Kette von ähnlichen Sätzen, die alle aus einem Fundamentalsatz[3]) fliessen, erscheint, so lässt sich, wie ich im Folgenden zeigen will, ein Theorem aufstellen, aus welchem der von Herrn *Gundelfinger* publicirte Satz sich als erstes Glied in einer Reihe von analogen Sätzen ergiebt.

Um diesen allgemeinen Satz bequem aussprechen zu können, ist es

---

[1]) *Weierstrass,* Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgänge 1858, 1868 und 1879. Wieder abgedruckt in den Mathematischen Werken, Bd. 1, S. 233 u. Bd. 2, S. 19, der fragliche Satz findet sich S. 42. Berlin. Dieses Theorem ist auch im Anschluss an die *Weierstrass*schen Untersuchungen von *Kronecker* behandelt worden. Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1868; Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 165.

[2]) *Otto Hesses* Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Dritte von *S. Gundelfinger* besorgte Auflage, S. 515. Leipzig 1876. Vergl. auch *S. Gundelfinger,* Vorlesungen über analytische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von *F. Dingeldey,* S. 65ff. Leipzig 1895.

[3]) *F. Klein,* Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form, Bonn, 1868, wieder abgedruckt in Bd. 23 der Mathematischen Annalen. — *Alf. Loewy,* Ueber die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. (Aus einem Briefe an Herrn *F. Klein.*) Mathematische Annalen, Bd. 52, S. 588.

nothwendig, den Begriff *„Charakteristik einer reellen quadratischen Form“*, den *ich in meinen* bisherigen Arbeiten*) für reelle quadratische Formen von nicht verschwindender Determinante eingeführt habe, auch auf solche von verschwindender Determinante auszudehnen. Man kann jede reelle quadratische Form $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} s_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$, bei welcher $s_{\alpha\beta}=s_{\beta\alpha}$ reelle Grössen bedeuten, durch eine und sogar durch unendlich viele Substitutionen von nicht verschwindender Determinante mit reellen Coefficienten:

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} t_{\alpha k}\zeta_k, \quad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

in die Normalform: $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q}\zeta_\alpha^2 - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r}\zeta_\alpha^2$ transformiren. Auf welche Weise auch immer diese Verwandlung geschehen mag, so haben doch die zwei Zahlen r und q stets denselben unveränderlichen Werth. r heisst der Rang, q der Trägheitsindex der Form; die Zahl $n-r$, wobei n die Anzahl von Variablen der Form bedeutet, wollen wir mit d bezeichnen und den ***Defect*** der reellen quadratischen Form nennen. In meinen früheren Arbeiten war, da die Determinante der Form nicht verschwinden sollte, $d=0$. Die kleinere der zwei Zahlen q und $r-q$ sei mit q' bezeichnet und heisse die ***Charakteristik der reellen quadratischen Form.*** Bei Benutzung des von Herrn *Frobenius***) stammenden Begriffes „Signatur σ“ einer reellen quadratischen Form, wobei $\sigma = 2q-r$ ist, wird $q' = \frac{r-|\sigma|}{2}$; hierbei ist $|\sigma|$ der absolute Betrag der Signatur σ.

Die angegebene Erweiterung des Begriffes „Charakteristik“ ermöglicht es, analoge Sätze, wie ich sie in meinem an Herrn *F. Klein* gerichteten Briefe für reelle quadratische Formen von nicht verschwindender Determinante ausgesprochen habe, auch für Formen von verschwindender Determinante zu formuliren. Infolgedessen kann man auch, ausgehend von dem Problem der Aufsuchung der Elementartheiler einer Schar von reellen quadratischen Formen, die Charakteristik einer reellen quadratischen Form ***verschwindender***

---

*) *Alf. Loewy,* Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen in Bd. 50 der Math. Annalen, S. 569 sowie in den Nova Acta der Kaiserl. Leopold.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 71, No. 8. Vergleiche auch den S. 54 unter [3]) citirten Brief.

**) *G. Frobenius,* Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1894, S. 79.

Determinante vollständig definiren. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich schliesslich auf *Hermite*sche Formen ausdehnen.

§ 1.

Der zu beweisende Fundamentalsatz, welcher den Mittelpunkt der Arbeit bilden wird, lautet:

Ist φ eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante, so genügen die Elementartheilerexponenten der Determinante der Formenschaar $\varrho\varphi-\psi$, falls ψ eine reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Werth der Charakteristik bedeutet und ϱ ein reeller variabler Parameter ist, der Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Hierbei ist $2s$ die Summe der Exponenten aller Elementartheiler, die für einen imaginären Werth des ϱ verschwinden; h durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementartheiler, die von einem reellen, von Null verschiedenen Werth des ϱ annullirt werden, und h' nimmt die Werthe der Exponenten aller Elementartheiler, die für $\varrho = 0$ verschwinden, an**). $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die grösste in $\frac{h}{2}$, $E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ die grösste in $\frac{h'-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler ist ganz unabhängig von φ und gleich dem Defect d von ψ.

Es seien $\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ und $\psi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ die zwei zu betrachtenden reellen quadratischen Formen; nach Voraussetzung soll die Determinante von φ von Null verschieden sein. Bei der Zerlegung in Elementartheiler möge die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ gleich

$$C(\varrho-c_1)^{e_1}(\varrho-c_2)^{e_2}\dots(\varrho-c_\tau)^{e_\tau}$$

werden; hierbei sei C eine von ϱ unabhängige Constante und $e_1+e_2+\dots+e_\tau = n$. Jeder der Factoren $(\varrho-c_\lambda)^{e_\lambda}$ ist ein Elementartheiler. Eventuell können auch einige der Grössen c unter einander gleich werden. Durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante kann man in φ und ψ statt der alten n Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ n neue Variablen:

---

*) Wenn die Determinante von ψ von Null verschieden ist, so existirt kein für $\varrho = 0$ verschwindender Elementartheiler.

$$\begin{matrix} X_{10}\, X_{11} \ldots X_{1e_1-1} \\ X_{20}\, X_{21} \ldots X_{2e_2-1} \\ \vdots \\ X_{\lambda 0}\, X_{\lambda 1} \ldots X_{\lambda e_\lambda -1} \\ \vdots \\ X_{\tau 0}\, X_{\tau 1} \ldots X_{\tau e_\tau -1} \end{matrix}$$

einführen; hierdurch geht

$$\varphi \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau} (X_{\lambda 0} X_{\lambda e_\lambda -1} + X_{\lambda 1} X_{\lambda e_\lambda -2} + \cdots + X_{\lambda e_\lambda -1} X_{\lambda 0}),$$

$$\begin{aligned} \psi \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau} & c_\lambda (X_{\lambda 0} X_{\lambda e_\lambda -1} + X_{\lambda 1} X_{\lambda e_\lambda -2} + \cdots + X_{\lambda e_\lambda -1} X_{\lambda 0}) \\ & + (X_{\lambda 0} X_{\lambda e_\lambda -2} + X_{\lambda 1} X_{\lambda e_\lambda -3} + \cdots + X_{\lambda e_\lambda -2} X_{\lambda 0}) \end{aligned}$$

über. Die aus ψ auf diese Weise hervorgegangene Form hat ebenso wie die überführende Substitution nicht nothwendig nur reelle Coefficienten. Um φ und ψ durch reelle lineare Substitutionen in reelle quadratische Formen zu verwandeln, verfahre man auf folgende Art: Wenn $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ einen reellen Elementartheiler bedeutet, dann ersetze man die Variablen $X_{\lambda 0} X_{\lambda 1} \ldots X_{\lambda e_\lambda -1}$ durch die Substitution $X_{\lambda\mu} = \sqrt{\varepsilon_\lambda}\, \mathfrak{X}_{\lambda\mu}$, wobei $\mu = 0, 1, 2, \ldots, e_\lambda - 1$ und ε_λ die positive oder negative Einheit ist, je nachdem ein gewisser durch die zwei zusammengehörigen Grössen c_λ und e_λ bestimmter Ausdruck C_λ, welcher von Null verschieden ist, das positive oder negative Vorzeichen besitzt. Der Theil von ψ, welcher dem reellen Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ entspricht, geht durch die neue Substitution über in:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_\lambda c_\lambda (\mathfrak{X}_{\lambda 0} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -1} + \mathfrak{X}_{\lambda 1} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -2} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -1} \mathfrak{X}_{\lambda 0}) \\ & \quad + \varepsilon_\lambda (\mathfrak{X}_{\lambda 0} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -2} + \mathfrak{X}_{\lambda 1} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -3} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -2} \mathfrak{X}_{\lambda 0}). \end{aligned}$$

Den soeben hingeschriebenen Theil, welcher dem reellen Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ entspricht, wollen wir mit T_λ bezeichnen.

Wenn $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ ein imaginärer Elementartheiler ist, so gehört zu diesem stets ein zweiter imaginärer Elementartheiler $(\varrho - c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$, sodass $c_{\lambda'}$ conjugirt imaginär zu c_λ und $e_{\lambda'} = e_\lambda$ wird. Ist also $c_\lambda = m_\lambda + i m'_\lambda$, wobei $i = \sqrt{-1}$ ist, so wird: $c_{\lambda'} = m_\lambda - i m'_\lambda$ werden. Setzt man:

$$\begin{aligned} X_{\lambda\mu} &= \mathfrak{X}_{\lambda\mu} + i \mathfrak{X}'_{\lambda\mu}, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, e_\lambda - 1) \\ X_{\lambda'\mu} &= \mathfrak{X}_{\lambda\mu} - i \mathfrak{X}'_{\lambda\mu} \end{aligned}$$

und ertheilt den zwei Wurzeln $\sqrt{C_\lambda}$ und $\sqrt{C_{\lambda'}}$, wobei die von den Coefficienten

von φ und ψ sowie von den zwei Grössen c_λ und e_λ bezüglich $c_{\lambda'}$ und $e_{\lambda'} = e_\lambda$ abhängigen Ausdrücke C_λ und $C_{\lambda'}$ in diesem Falle conjugirt imaginär sind, ebenfalls conjugirt imaginäre Werthe, so geht der Theil von ψ, welcher den zwei Elementartheilern $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ und $(\varrho - c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}} = (\varrho - c_{\lambda'})^{e_\lambda}$ entspricht, über in:

$$
\begin{aligned}
&(m_\lambda + im'_\lambda)[(\mathfrak{x}_{\lambda 0} + i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})(\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} + i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1}) + \cdots + (\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} + i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1}) \cdot (\mathfrak{x}_{\lambda 0} + i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})] \\
&\quad + [(\mathfrak{x}_{\lambda 0} + i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})(\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} + i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2}) + \cdots + (\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} + i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2})(\mathfrak{x}_{\lambda 0} + i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})] \\
&+ (m_\lambda - im'_\lambda)[(\mathfrak{x}_{\lambda 0} - i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})(\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} - i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1}) + \cdots + (\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} - i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1})(\mathfrak{x}_{\lambda 0} - i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})] \\
&\quad + [(\mathfrak{x}_{\lambda 0} - i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})(\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} - i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2}) + \cdots + (\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} - i\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2})(\mathfrak{x}_{\lambda 0} - i\mathfrak{x}'_{\lambda 0})] \\
&\quad = 2m_\lambda[\mathfrak{x}_{\lambda 0}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} + \mathfrak{x}_{\lambda 1}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} + \cdots + \mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1}\mathfrak{x}_{\lambda 0}] \\
&\quad - 2m_\lambda[\mathfrak{x}'_{\lambda 0}\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1} + \mathfrak{x}'_{\lambda 1}\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2} + \cdots + \mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1}\mathfrak{x}'_{\lambda 0}] \\
&\quad - 4m'_\lambda[\mathfrak{x}'_{\lambda 0}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} + \mathfrak{x}'_{\lambda 1}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} + \cdots + \mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1}\mathfrak{x}_{\lambda 0}] \\
&\quad + 2[\mathfrak{x}_{\lambda 0}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} + \mathfrak{x}_{\lambda 1}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 3} + \cdots + \mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2}\mathfrak{x}_{\lambda 0}] \\
&\quad - 2[\mathfrak{x}'_{\lambda 0}\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2} + \mathfrak{x}'_{\lambda 1}\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 3} + \cdots + \mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2}\mathfrak{x}'_{\lambda 0}].
\end{aligned}
$$

Diesen soeben hingeschriebenen Theil, welcher zwei zusammengehörigen imaginären Elementartheilern $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ und $(\varrho - c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$ entspricht, wollen wir mit V_λ bezeichnen.

Gesetzt unter den τ Elementartheilern der Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ seien σ reelle, so wird die Anzahl der imaginären Elementartheiler gleich $\tau - \sigma$ und $\tau - \sigma$ ist eine gerade Zahl. Man kann dann stets durch reelle lineare Substitutionen von nicht verschwindender Determinante die Formenschar $\varrho\varphi - \psi$ so transformiren, dass ψ in die reelle quadratische Form:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\frac{\tau-\sigma}{2}+\sigma} V_\lambda$$

übergeht. Vermöge unserer Substitution nimmt φ die Gestalt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} \varepsilon_\lambda(\mathfrak{x}_{\lambda 0}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} + \mathfrak{x}_{\lambda 1}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} + \cdots + \mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1}\mathfrak{x}_{\lambda 0}) \\
&+ 2 \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\frac{\tau-\sigma}{2}+\sigma} [(\mathfrak{x}_{\lambda 0}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1} + \mathfrak{x}_{\lambda 1}\mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 2} + \cdots + \mathfrak{x}_{\lambda e_\lambda - 1}\mathfrak{x}_{\lambda 0}) \\
&\qquad - (\mathfrak{x}'_{\lambda 0}\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1} + \mathfrak{x}'_{\lambda 1}\mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 2} + \cdots + \mathfrak{x}'_{\lambda e_\lambda - 1}\mathfrak{x}'_{\lambda 0})]
\end{aligned}
$$

an.*)

*) Wegen der näheren Ausführung des Obigen vergleiche man die grundlegende Arbeit von *Weierstrass* „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“ (Monats-

Die neue reelle quadratische Form, welche aus ψ durch eine reelle lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante hervorgeht, hat denselben Rang und Trägheitsindex, mithin auch dieselbe Charakteristik wie ψ. Die Charakteristik von $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ ist gleich oder grösser als die Summe der Charakteristiken der einzelnen Theilformen T_λ und V_λ, in welche die Form zerfällt. Zur Herleitung unseres Satzes wird mithin nur die Untersuchung der Charakteristiken von T_λ und V_λ erforderlich sein.

Wir bestimmen zuerst die Charakteristik von T_λ unter der Voraussetzung, dass c_λ von Null verschieden ist. Um die Charakteristik von T_λ für $e_\lambda = 2p+1$, also falls der Elementartheilerexponent eine ungerade Zahl ist, zu finden, führe man die neuen Variablen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-3},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}
\end{aligned}$$

in T_λ ein; dann geht T_λ über in:

$$2(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p+1}) + \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}^2.$$

Die neue reelle Form geht aus T_λ durch eine reelle lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante hervor; mithin hat sie denselben Rang, denselben Trägheitsindex und die gleiche Charakteristik wie T_λ. Die zuletzt hingeschriebene Form hat den Rang $2p+1$, den Trägheitsindex $p+1$ oder p, je nachdem $\varepsilon_\lambda c_\lambda$ ein positives oder negatives Vorzeichen hat. Infolge dessen hat die Charakteristik von T_λ in dem untersuchten Falle den Werth p, d. h. sie ist gleich der grössten in $\frac{e_\lambda}{2} = \frac{2p+1}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl, also $= E\left(\frac{e_\lambda}{2}\right)$.

---

berichte der Berliner Akademie, 1868); vgl. vorzüglich den Wiederabdruck dieser Arbeit im zweiten Bande der Gesammelten Werke, bei welchem eine Berichtigung stattfand. Ferner sehe man die Darstellungen bei *Gundelfinger* in den schon citirten Supplementen zu *Hesses* Raumgeometrie und bei *F. Klein* in der ebenfalls schon angeführten Arbeit. [Nachschrift vom Januar 1900: Inzwischen ist das Werk von *Muth* „Theorie und Anwendung der Elementartheiler“ erschienen; dort findet man die hier angewandten Betrachtungen auf S. 122 gegeben.]

Will man die Charakteristik von T_λ für ein von Null verschiedenes c_λ, falls $e_\lambda = 2p$ ist, bestimmen, so setze man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-3},\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p} + \frac{\varepsilon_\lambda}{2} \mathfrak{X}_{\lambda p-1}.
\end{aligned}$$

Durch diese Transformation geht T_λ über in:

$$2(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p}).$$

Diese neue reelle Form, welche aus T_λ durch eine reelle lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante hervorgeht, hat den Rang $2p$ und den Trägheitsindex p, mithin die Charakteristik p. Die Charakteristik von T_λ ist also wie oben $= p$, d. h. gleich der grössten in $\frac{e_\lambda}{2} = \frac{2p}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl, also wiederum $E\left(\frac{e_\lambda}{2}\right)$.

Sollte $c_\lambda = 0$ sein, so wird T_λ die einfachere Form:

$$\varepsilon_\lambda(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda - 2} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda - 3} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda - 2}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$

annehmen. Diese reelle quadratische Form hat den Rang $e_\lambda - 1$; wenn $e_\lambda = 2p+1$ ist, so ist der Trägheitsindex $= p$, falls $e_\lambda = 2p$ ist, so ist der Trägheitsindex $= p$ oder $p-1$, je nachdem ε_λ die positive oder negative Einheit ist. Die Charakteristik hat mithin für $e_\lambda = 2p+1$ den Werth p, für $e_\lambda = 2p$ hat sie den Werth $p-1$. Ist also e_λ ein Elementartheilerexponent, der $c_\lambda = 0$ entspricht, so ist die Charakteristik von T_λ gleich $E\left(\frac{e_\lambda - 1}{2}\right)$, ganz unabhängig davon ob e_λ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Um die Charakteristik von V_λ zu bestimmen, setze man, falls $e_\lambda = 2p$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1}\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-3} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda p} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1}\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p} + 2\mathfrak{X}_{\lambda p-1} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p}\\
\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-1} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1}\\
\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-2} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-3} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p+1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda p} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1},$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p} + 2\mathfrak{X}'_{\lambda p-1} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}.$$

Hierdurch geht V_λ über in:

$$\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p}$$
$$-\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-1} - \mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-2} - \cdots - \mathfrak{X}'_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}'_{\lambda p}.$$

Der Rang der soeben hergeleiteten Form ist gleich $2e_\lambda$; der Trägheitsindex, wie die Charakteristik haben den Werth e_λ. Die Determinante der überführenden reellen Substitution verschwindet nicht, weil m'_λ von Null verschieden ist; infolge dessen hat V_λ auch die Charakteristik, wie den Trägheitsindex e_λ.

Falls $e_\lambda = 2p+1$ ist, so führe man in V_λ durch folgende reelle Substitution von nicht verschwindender Determinante neue Variablen ein, man setze:

$$\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} = 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p},$$
$$\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1},$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda p} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1},$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p},$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p-1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1},$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p+1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda p} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1}.$$

Durch die Einführung der neuen Variablen geht V_λ über in:

$$\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p+1}$$
$$-\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p} - \mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-1} - \cdots - \mathfrak{X}'_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}'_{\lambda p+1}$$
$$+(2m_\lambda \mathfrak{X}^2_{\lambda p} - 2m_\lambda \mathfrak{X}'^2_{\lambda p} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}\mathfrak{X}'_{\lambda p}).$$

Die zuletzt hingeschriebene Form hat, da m'_λ von Null verschieden sein muss, den Rang $2(2p+1) = 2e_\lambda$.

Der Trägheitsindex, wie die Charakteristik sind $= 2p+1$. Mithin hat V_λ die Charakteristik e_λ.

Die Charakteristik von $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ ist gleich oder grösser als die Summe der Charakteristiken der Theile, d. h. $\geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$; hierbei ist $2s$ die Summe aller Elementartheilerexponenten, die zu sämmt-

lichen Theilen V_λ gehören; h durchläuft sämmtliche Exponenten von Elementartheilern, die zu allen Theilen T_λ gehören, falls T_λ einem reellen Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$, bei welchem c_λ von Null verschieden ist, entspricht; h' durchläuft in der Summe sämmtliche Exponenten derjenigen Elementartheiler, die für $\varrho = 0$ verschwinden. $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ hat dieselbe Charakteristik wie ψ, mithin:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Dass der Defect von ψ gleich der Anzahl der für Null verschwindenden Elementartheiler der Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ ist, folgt sofort aus der Definition des Begriffes „Elementartheiler“ und dem Umstande, dass der Rang r einer quadratischen Form ψ gleich dem Rang ihrer Determinante ist, also dadurch bestimmt wird, dass alle Determinanten $(r+1)$-ten und höheren Grades, die man aus der Determinante von ψ bilden kann, verschwinden, hingegen nicht mehr sämmtliche Determinanten r-ten Grades Null sind.

Man kann dieses Resultat auch herleiten, indem man bedenkt, ψ und $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ haben gleichen Rang. Wie das Obige zeigt, ist der Rang r von $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ gleich $2s + \Sigma h + \Sigma(h'-1)$; da $2s + \Sigma h + \Sigma h' = n$, so folgt: der Defect $d = n - r$ ist gleich der Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler. Man kann den abgeleiteten Satz noch in der folgenden etwas allgemeineren Form aussprechen:

Hat man eine Schar von reellen quadratischen Formen $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$, ***deren Determinante nicht identisch verschwindet, und ist*** $\gamma\mathfrak{P} + \eta\mathfrak{Q}$ ***irgend eine beliebige in der Schar enthaltene reelle quadratische Form, welche die Zahl*** q' ***als Charakteristik hat, so besteht die Ungleichheit:***

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

$2s$ ***bedeutet hierbei die Summe der Exponenten aller imaginären Elementartheiler**) der Determinante von* $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$; ***in*** $\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)$ ***durchläuft*** h ***die Ex-***

*) Unter einem imaginären Elementartheiler der Determinante von $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$ sei ein solcher verstanden, der für einen complexen Werth des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ verschwindet;

ponenten aller reellen Elementartheiler der Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$***, ausgenommen die Exponenten derjenigen Elementartheiler, welche für den Werth*** $\frac{\gamma}{\eta}$ ***des Verhältnisses*** $\frac{\mu}{\nu}$ ***verschwinden;*) h' nimmt in*** $\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ ***die Werthe der Exponenten aller Elementartheiler der Determinante von*** $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$***, welche für den Werth*** $\frac{\gamma}{\eta}$ ***des Verhältnisses*** $\frac{\mu}{\nu}$ ***verschwinden, an.***

Der Beweis dieses Satzes folgt sofort aus der Ueberlegung, dass man die Schar $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ auch in gleichwerthiger Weise als Schar $\varrho\varphi-\psi$ schreiben kann, falls man $\psi=\gamma\mathfrak{P}+\eta\mathfrak{Q}$ und $\varphi=\gamma_1\mathfrak{P}+\eta_1\mathfrak{Q}$ setzt; dabei ist $\mu=\gamma_1\varrho-\gamma$ und $\nu=\eta_1\varrho-\eta$, unter ϱ ein reeller variabler Parameter verstanden. η_1 und γ_1 sind reelle Zahlen, welche aus der Gleichung $\gamma_1\eta-\eta_1\gamma=+1$ so zu bestimmen sind, dass die Determinante von $\gamma_1\mathfrak{P}+\eta_1\mathfrak{Q}$ von Null verschieden ist. Da nach Voraussetzung die Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ nicht identisch verschwindet, so kann man stets Zahlen γ_1 und η_1 finden, welche den Bedingungen genügen. Jedem Elementartheiler $(\varrho-c_\lambda)^{e_\lambda}$ von $\varrho\varphi-\psi$ entspricht dann ein Elementartheiler der Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$, welcher denselben Exponenten e_λ hat und für den Werth $\frac{\gamma_1 c_\lambda-\gamma}{\eta_1 c_\lambda-\eta}$ des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ verschwindet.**)

§ 2.

Aus der Ungleichheit $q'\geqq s+\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)+\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ kann man die folgenden wichtigen Folgerungen ziehen:

a) ***Ist*** φ ***irgend eine reelle quadratische Form mit n Variablen von nicht verschwindender Determinante†) und*** ψ ***eine beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl*** q' ***als Charakteristik, so hat die gleich Null gesetzte Determinante von*** $\varrho\varphi-\psi$ ***wenigstens*** $n-2q'$ ***reelle Wurzeln*** ϱ***; hat die Gleichung*** $|\varrho\varphi-\psi|=0$

---

da die Formenschar $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ reell ist, so sind die imaginären Elementartheiler paarweise von gleichem Grade vorhanden; diese verschwinden für conjugirt imaginäre Werthe des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$; mithin ist die Summe sämmtlicher imaginären Elementartheiler stets eine gerade Zahl $2s$.

*) Die Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ besitzt dann und nur dann einen Elementartheiler, der für den Werth $\frac{\gamma}{\eta}$ des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ Null wird, falls die Form $\gamma\mathfrak{P}+\eta\mathfrak{Q}$ eine verschwindende Determinante hat.

) Vergl. in Bezug hierauf ***Weierstrass* in Bd. II der Ges. Werke, S. 24.

†) Vergl. die Anmerkung auf S. 63.

genau $n-2q'$ reelle Wurzeln, so gehören diese reellen Wurzeln zu einfachen Elementartheilern der Determinante von $\varrho\varphi-\psi$, ausgenommen etwa die Wurzeln $\varrho=0$, bei welchen auch die Zahl 2 als Elementartheilerexponent auftreten darf.

b) *Ist φ irgend eine reelle quadratische Form mit n Variablen von nicht verschwindender Determinante*) und ψ eine beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik, so kann die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$, wobei ϱ ein variabler Parameter ist, nicht mehr als q' Elementartheiler, die nicht ein- oder zweifach sind, besitzen. Hat die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ genau q' Elementartheiler, die nicht ein- oder zweifach sind, so sind diese drei- oder vierfach. Besitzt die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ genau q' drei- oder vierfache Elementartheiler, so hat die Gleichung $|\varrho\varphi-\psi|=0$ nur reelle Wurzeln; die zwei- und vierfachen Elementartheiler gehören in diesem Falle nur zu etwa auftretenden Wurzeln $\varrho=0$.*

Aus jedem dieser zwei Sätze folgt, wenn man für ψ eine reelle quadratische Form mit der Charakteristik $q'=0$ setzt, das in der Einleitung besprochene *Gundelfinger*sche Theorem.

Ist ψ eine reelle quadratische Form mit der Charakteristik $q'=1$, so ergeben sich folgende Resultate. Die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ besitzt entweder:

1. Nur ein- oder zweifache Elementartheiler, die ausschliesslich für reelle Wurzeln verschwinden, die etwa zweifach auftretenden Elementartheiler gehören nur zu den Wurzeln $\varrho=0$,

oder:

2. nur ein- oder zweifache Elementartheiler, von denen zwei für conjugirt imaginäre Grössen, alle übrigen für reelle Wurzeln verschwinden, die etwa zweifach auftretenden Elementartheiler können nur zu den Wurzeln $\varrho=0$ gehören,

oder:

3. nur reelle Wurzeln, von denen eine von Null verschiedene Wurzel zu einem zweifachen Elementartheiler, alle anderen von Null verschiedenen

---

*) Der Satz bleibt, wie aus dem letzten Theorem des § 1 hervorgeht, auch gültig, wenn φ eine reelle quadratische Form mit n Variablen *von verschwindender Determinante* ist, nur muss man dann voraussetzen, dass jedenfalls $|\varrho\varphi-\psi|$ nicht identisch Null sein darf.

Wurzeln zu einfachen Elementartheilern gehören, die Wurzeln $\varrho = 0$ können zu ein- oder zweifachen Elementartheilern gehören,

oder:

4. nur reelle Wurzeln, von denen eine von Null verschiedene Grösse zu einem dreifachen Elementartheiler, alle anderen von Null verschiedenen Wurzeln zu einfachen Elementartheilern gehören, die Wurzeln $\varrho = 0$ können zu ein- oder zweifachen Elementartheilern gehören,

oder:

5. n reelle Wurzeln, von denen die von Null verschiedenen zu einfachen Elementartheilern gehören, die Wurzeln $\varrho = 0$ aber vertheilen sich auf einfache, zweifache sowie einen dreifachen oder auf einfache, zweifache sowie einen vierfachen Elementartheiler.

§ 3.

Hat man eine beliebige reelle quadratische Form ψ von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik, so kann man stets reelle quadratische Formen φ von nicht verschwindender Determinante finden, dass die Determinante der Formenschar $\varrho\varphi - \psi$, wobei ϱ ein reeller variabler Parameter ist, beliebig vorgegebene Elementartheiler besitzt; jedoch muss man bei der willkürlichen Vorgabe der Elementartheiler dafür Sorge tragen, dass die imaginären Elementartheiler paarweise conjugirt imaginär von gleichem Grade gegeben sind, dass die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler genau gleich dem Defect von ψ wird und dass schliesslich die fundamentale Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$$

erfüllt ist.

Der Beweis für den aufgestellten Satz ist folgender: Entsprechend dem gegebenen System von Elementhartheilern kann man sich die reelle quadratische Form $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ bilden; diese Form ist durch die gegebenen Elementartheiler völlig bestimmt, nur in Bezug auf die Grössen ε_λ, die gleich $+1$ oder -1 sein können und bei der Bildung von T_λ auftreten, herrscht noch eine Willkürlichkeit. Diese Grössen ε_λ können wir uns so bestimmen, dass unsere Form $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ denselben Trägheitsindex

wie die Form ψ erhält. Betrachten wir jetzt die Formenschar:

$$\varrho\Big[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}\varepsilon_\lambda(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$
$$+2\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}\{(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$
$$-(\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}'_{\lambda 0})\}\Big]-\Big[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}T_\lambda+\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}V_\lambda\Big],$$

so hat dieselbe die vorgegebenen Elementartheiler (vergl. Seite 57). Da $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}T_\lambda+\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}V_\lambda$ denselben Trägheitsindex und denselben Rang wie ψ hat, so giebt es eine reelle lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante, welche $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}T_\lambda+\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}V_\lambda$ in ψ überführt; wendet man diese Substitution auf

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}\varepsilon_\lambda(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$
$$+2\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}\{(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$
$$-(\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}'_{\lambda 0})\}$$

an, so erlangt man eine reelle quadratische Form φ von nicht verschwindender Determinante, so dass die Determinante der reellen Formenschar $\varrho\varphi-\psi$ die vorgegebenen Elementartheiler besitzt.

Der soeben bewiesene Satz zeigt, dass die aus den Elementartheilerexponenten der Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ gebildete Zahl $s+\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)+\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ bei geeigneter Wahl einer reellen quadratischen Form φ von nicht verschwindender Determinante stets die Zahl q' d. h. die Charakteristik der gegebenen Form ψ erreichen kann. Hieraus gewinnt man folgende Folgerungen:

Der höchste mögliche Elementartheilerexponent, der zu einem reellen, für einen von Null verschiedenen Werth verschwindenden Elementartheiler der Determinante der Formenschar $\varrho\varphi-\psi$ gehören kann, falls ψ eine gegebene reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik ist und für φ jede reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante gesetzt werden kann, ist gleich $2q'+1$. Ist $q'=\frac{r}{2}$, wobei r den Rang von ψ bedeutet, so ist

das Maximum für einen Elementartheilerexponenten, der zu einem reellen, für einen von Null verschiedenen Werth verschwindenden Elementartheiler gehört, gleich $2q' = r$.

Hieraus ergiebt sich die folgende ***Definition*** der Charakteristik einer reellen quadratischen Form ψ von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante:

1. ***Die Charakteristik von*** ψ ***ist gleich der grössten in*** $\frac{\lambda}{2}$ ***enthaltenen ganzen Zahl, wenn*** λ ***das Maximum des Elementartheilerexponenten, der zu einem reellen, für einen von Null verschiedenen Werth verschwindenden Elementartheiler der Determinante von*** $\varrho\varphi - \psi$ ***gehört, bedeutet; hierbei soll für*** φ ***jede beliebige reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante gesetzt werden können.***

Aus dem ersten Satze dieses Paragraphen fliessen noch folgende weitere ***Definitionen der Charakteristik:***

2. ***Die Charakteristik einer reellen quadratischen Form*** ψ ***von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante ist der höchste Exponent, welcher bei einem imaginären Elementartheiler der Determinante der reellen Formenschar*** $\varrho\varphi - \psi$ ***auftritt; für*** φ ***kann hierbei jede reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante gesetzt werden.***

3. ***Die Maximalzahl für sämmtliche verschiedene imaginäre Wurzeln der gleich Null gesetzten Determinante von*** $\varrho\varphi - \psi$, ***wobei*** ϱ ***einen Parameter bedeutet, und*** φ ***jede beliebige reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante ist, giebt uns den doppelten Werth der Charakteristik der gegebenen reellen quadratischen Form*** ψ ***von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante an.***

4. ***Die Anzahl der reellen Elementartheiler der Determinante von*** $\varrho\varphi - \psi$, ***welche vom zweiten Grade sind und für einen von Null verschiedenen Werth des*** ϱ ***verschwinden, giebt für ihr Maximum, wenn man für*** φ ***jede beliebige reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante setzt, die Charakteristik der gegebenen reellen quadratischen Form*** ψ ***von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante an.***

Ist ψ eine reelle quadratische Form von ***verschwindender Determinante*** mit der Charakteristik q', so hat die Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ einen Elementartheiler ϱ^{λ}, das Maximum für λ, wenn man für φ alle reellen quadratischen Formen von nicht verschwindender Determinante setzt, ist nach

dem ersten Satze dieses Paragraphen $\lambda = 2q'+2$, sollte jedoch $q' = \frac{r}{2}$ sein, wobei r der Rang von ψ ist, so wird $\lambda = 2q'+1$.

Hieraus folgt:

Ist ψ eine reelle quadratische Form von verschwindender Determinante, so ist die Charakteristik von ψ gleich der grössten in $\frac{\lambda-1}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl, wenn λ den Maximalwerth des Exponenten für einen Elementartheiler ϱ^λ der Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ bedeutet und man für φ jede reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante setzen kann.

§ 4.

Die vorstehenden Untersuchungen wollen wir jetzt auf Scharen ***Hermitescher Formen*** ausdehnen. Ist $\Phi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ eine bilineare Form, bei welcher $a_{\alpha\beta}$ und $a_{\beta\alpha}$ conjugirt imaginäre Grössen sind, so heisst Φ bekanntlich eine ***Hermite***sche Form. Man kann zu jeder ***Hermite***schen Form auf unendlich viele Arten zwei lineare Substitutionen von nicht verschwindender Determinante:

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} p_{\alpha k}\zeta_k, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

$$\bar{x}_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} \bar{p}_{\alpha k}\bar{\zeta}_k,$$

bei welchen $p_{\alpha k}$ und $\bar{p}_{\alpha k}$ conjugirt imaginäre Grössen sind, finden, dass die ***Hermite***sche Form Φ in die folgende Normalform:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \zeta_\alpha\bar{\zeta}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \zeta_\alpha\bar{\zeta}_\alpha$$

übergeht. Die Zahlen r und q sind hierbei genau analog wie bei den quadratischen reellen Formen Attribute der Hermiteschen Form und ganz unabhängig von den gewählten überführenden Substitutionen; r heisst der Rang, q der Trägheitsindex der ***Hermite***schen Form. Die ***Charakteristik*** von Φ kann mithin ebenso wie bei den reellen quadratischen Formen als kleinere der zwei Zahlen q und $r-q$ definirt werden; führt man nach Herrn ***Frobenius*** die Signatur $\sigma = 2q-r$ einer ***Hermite***schen Form ein, so ist $q' = \frac{r-|\sigma|}{2}$; hiebei bedeutet $|\sigma|$ den absoluten Betrag der Signatur. Die Zahl $n-r$ wollen wir wie bei den reellen quadratischen Formen den Defect d der ***Hermite***schen Form nennen.

Betrachtet man in Φ die n Variablenpaare x_α und $\bar{x}_\alpha$ als conjugirt imaginär und setzt:

$$x_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, n$$
$$\bar{x}_\alpha = u_\alpha - iv_\alpha,$$

wobei die $2n$ Grössen u_α, v_α reelle Variable bedeuten und $i = \sqrt{-1}$ ist, so geht die *Hermite*sche Form Φ über in eine reelle quadratische Form φ von den $2n$ reellen Variablen u_α, v_α. Hat Φ den Rang r und den Trägheitsindex q, so hat φ den Rang $2r$ und den Trägheitsindex $2q$. Die Charakteristik von φ hat den Werth $2q'$, der Defect von φ ist gleich $2d$, wenn Φ die Charakteristik q' und den Defect d besitzt. —

Wenn $\varrho\Phi - \Psi = \varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$ eine Schar von *Hermite*schen Formen mit n Variablenpaaren ist, so kann man ihr also, falls man: $x_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha$, $\bar{x}_\alpha = u_\alpha - iv_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n$, $i = \sqrt{-1}$ setzt, die Schar reeller quadratischer Formen $\varrho\varphi - \psi$ mit $2n$ Variablen zuordnen; dann gilt folgende Relation: die Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ ist gleich dem Quadrat der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$, also $|\varrho\varphi - \psi| = |\varrho\Phi - \Psi|^2$. Besitzt die Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$ die Elementartheiler $(\varrho - c_1)^{e_1}$, $(\varrho - c_2)^{e_2}$, $(\varrho - c_3)^{e_3}$, …, $(\varrho - c_\tau)^{e_\tau}$, so hat die Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ die Elementartheiler $(\varrho - c_1)^{e_1}$, $(\varrho - c_1)^{e_1}$, $(\varrho - c_2)^{e_2}$, $(\varrho - c_2)^{e_2}$, $(\varrho - c_3)^{e_3}$, $(\varrho - c_3)^{e_3}$, …, $(\varrho - c_\tau)^{e_\tau}$, $(\varrho - c_\tau)^{e_\tau}$. Nehmen wir nun an, Ψ sei eine *Hermite*sche Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q', so gilt nach dem Fundamentalsatz des § 1 für die zugeordnete reelle quadratische Form ψ mit der Charakteristik $2q'$ die Ungleichheit:

$$2q' \geqq 2s + 2\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + 2\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right);$$

hierbei bedeutet $2s$ die Summe der Exponenten der imaginären Elementartheiler*) der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$; h durchläuft bei $\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)$ alle Exponenten sämmtlicher reellen Elementartheiler der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$, welche nicht für $\varrho = 0$ verschwinden; h' nimmt die Werthe aller Exponenten sämmtlicher für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$ an. Mithin wird $q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ und der Funda-

*) Zu jedem imaginären Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ der Determinante einer Schar $\varrho\Phi - \Psi$ von *Hermite*schen Formen gehört ein zweiter Elementartheiler $(\varrho - c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$, bei dem $c_{\lambda'}$ conjugirt imaginär zu c_λ und $e_{\lambda'} = e_\lambda$ ist.

mentalsatz des § 1 bleibt auch für *Hermite*sche Formen unverändert gültig. Er lautet also:

Ist Φ eine Hermitesche Form von nicht verschwindender Determinante, so genügen die Elementartheilerexponenten der Determinante der Formenschar $\varrho\Phi - \Psi$, falls Ψ eine Hermitesche Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Werth der Charakteristik bedeutet und ϱ ein reeller variabler Parameter ist, der Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Hierbei ist $2s$ die Summe der Exponenten aller Elementartheiler, die für einen imaginären Werth des ϱ verschwinden; h durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementartheiler, die von einem reellen, von Null verschiedenen Werth des ϱ annullirt werden, und h' nimmt die Werthe der Exponenten aller Elementartheiler, die für $\varrho = 0$ verschwinden, an. $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die grösste in $\frac{h}{2}$, $E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ die grösste in $\frac{h'-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler ist ganz unabhängig von Φ und gleich dem Defect d von Ψ.

Infolge dieses Theorems bleiben alle im § 1 und § 2 für reelle quadratische Formen ausgesprochenen Resultate *unverändert auch für Hermitesche Formen gültig.* Der specielle Satz, welcher sich für die Determinante einer Schar von *Hermite*schen Formen $\varrho\Phi - \Psi$, wenn Φ eine *Hermite*sche Form von nicht verschwindender Determinante und Ψ eine solche von verschwindender Determinante mit der Charakteristik $q' = 0$ ist, ergiebt, war *Weierstrass* schon lange bekannt; dies geht aus einen Briefe, den Herr *Frobenius* im November 1881 an *Weierstrass* richtete, hervor. Dieser Brief, in dem Herr *Frobenius* auf *Weierstrass*' Veranlassung „dieses merkwürdige Resultat, welches *Weierstrass* in der Theorie einer speciellen Art von bilinearen Formen erhalten hatte", mit den von *Frobenius* in der Theorie der bilinearen Formen angewandten Hülfsmitteln*) bewies, ist jedoch erst 1896 in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich**)

*) ***G. Frobenius,*** Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Dieses Journal Bd. 84.

) ***G. Frobenius,* Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen. (Auszug aus einem Briefe an ***K. Weierstrass.***) Jubelband der Züricher naturforschenden Gesellschaft, p. 20.

im Druck erschienen. Zuerst publicirt wurde das für eine Schar *Hermite*scher Formen, welche eine semidefinite *Hermite*sche Form enthält, gültige Theorem von Herrn *Gundelfinger**), der diesen Satz unabhängig gefunden hatte. Das bei einer definiten *Hermite*schen Form gültige Resultat ist schon allgemein 1864 von Herrn *Christoffel***) bewiesen worden. Die Verhältnisse, welche für Scharen von *Hermite*schen Formen, wenn die Charakteristik einer *Hermite*schen Form von nicht verschwindender Determinante, die in der Schar enthalten ist, bekannt ist, statthaben, habe ich zuerst ohne Beweis in meinem Brief an Herrn *Klein* angegeben†); hier liegt die Ausdehnung auf Formen von verschwindender Determinante vor. Durch diese Untersuchungen ist das *Christoffel-Weierstrass-Gundelfinger*sche Theorem über definite und semidefinite *Hermite*sche Formen, welche in einer Schar *Hermite*scher Formen enthalten sind, als erstes Glied in eine Kette ähnlicher Sätze eingegliedert.

Auch die Resultate des § 3 behalten für *Hermitesche Formen ihre unveränderte Gültigkeit.* Es gilt also vorzüglich der Satz:

Hat man eine beliebige Hermitesche Form Ψ von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik, so kann man stets Hermitesche Formen Φ von nicht verschwindender Determinante finden, dass die Determinante der Formenschar $\varrho\Phi-\Psi$, wobei ϱ ein reeller variabler Parameter ist, beliebig vorgegebene Elementartheiler besitzt; jedoch muss man bei der willkürlichen Vorgabe der Elementartheiler darauf achten, dass die imaginären Elementartheiler paarweise conjugirt imaginär von gleichem Grade gegeben sind, dass die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementar-

---

*) ***S. Gundelfinger,*** Vorlesungen über analytische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von ***F. Dingeldey***, p. 74.

) ***Christoffel,* Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn ***Weierstrass.*** Dieses Journal Bd. 63 (1864). In speciellerer Form wurde dieser Satz schon vorher von ***Hermite*** (Comptes Rendus, tome 41) und von ***Clebsch*** (dieses Journal Bd. 57 und Bd. 62) angegeben.

†) Erst während der Drucklegung des vorliegenden Aufsatzes werden mir die Untersuchungen von Herrn ***Corrado Segre,*** auf welche mich der geschätzte Herr Verfasser gütigst brieflich aufmerksam machte, zugänglich. In Herrn ***Segre***s „Nuovo campo di ricerche geometriche", Nota IV., Atti della reale academia delle scienze di Torino vol. 26, 16. Nov. 1890, S. 16 Anm. findet sich das specielle Theorem, welches dem Satze 3 des § 3 im Falle ***Hermite***scher Formen von nicht verschwindender Determinante entspricht, angegeben.

theiler genau gleich dem Defect von Ψ ist und dass schliesslich die fundamentale Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$$

erfüllt ist.

Der Beweis lässt sich auf folgende Art führen: Man kann die gegebene *Hermite*sche Form Ψ, welche den Rang r und den Trägheitsindex q hat, stets durch zwei conjugirt imaginäre Substitutionen von nicht verschwindender Determinante in die Normalform:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha$$

überführen. Betrachten wir dann die reelle quadratische Form $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha^2 - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha^2$, welche gleichen Rang, gleichen Trägheitsindex und gleiche Charakteristik wie Ψ hat, so kann man nach dem ersten Satz des § 3 stets reelle quadratische Formen $\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$ von nicht verschwindender Determinante finden, dass die Determinante der Schar reeller quadratischer Formen:

$$\varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta - \left[\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha^2 - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha^2\right]$$

die vorgegebenen Elementartheiler hat. Ersetzt man diese Schar reeller quadratischer Formen durch die Formenschar:

$$\varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta - \left[\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha\right],$$

so repräsentirt die letztere Schar wegen der Realität der Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ und der Relation $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ eine Schar *Hermite*scher Formen. Die Determinante dieser Formenschar hat, da sie mit der Determinante der Schar reeller quadratischer Formen identisch ist, genau dieselben Elementartheiler wie jene. Wendet man auf $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$ die zwei conjugirt imaginären Substitutionen von nicht verschwindender Determinante, welche $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha$ in Ψ überführen, an, so geht $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$ in eine *Hermite*sche Form Φ von nicht verschwindender Determinante über. Da bei linearen Transformationen einer Schar bilinearer Formen die Elementartheiler invariant bleiben, so hat die Schar *Hermite*scher Formen $\varrho\Phi - \Psi$ die vorgelegten Elementartheiler.

Vermöge des bewiesenen Satzes bleiben auch die im § 3 gegebenen

Definition der Charakteristik einer reellen quadratischen Form *unverändert* gültig, wenn man überall statt der Worte *„quadratische Form“* die Worte *„Hermitesche Form“* setzt.

Auf die Untersuchung der Determinante einer Schar *Hermite*scher Formen, die uns bisher in diesem Paragraphen beschäftigte, kann auch die Frage nach den Elementartheilern *der charakteristischen Function einer besonderen Gattung bilinearer Formen* zurückgeführt werden. Diese bilinearen Formen sind auf folgende Art definirt: Es soll sich S nach der von Herrn *Frobenius**) dargelegten Symbolik als Product $A \cdot B$ zweier *Hermite*scher Formen A und B darstellen lassen, eine der zwei *Hermite*schen Formen habe dabei eine von Null verschiedene Determinante. Anders ausgedrückt: Die zu betrachtende bilineare Form $S = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} s_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ soll so beschaffen sein, dass sich ihre Coefficienten aus den Coefficienten zweier *Hermite*scher Formen $A = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$ und $B = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$ in der Form $s_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{\alpha k} \cdot b_{k\beta}$ componiren lassen, hierbei habe entweder die Determinante von A oder die von B einen von Null verschiedenen Werth.**) Wenn $|A|$ von Null verschieden ist, so kann für die charakteristische Function von S d. i. die Determinante von $\varrho E - S$, wobei $E = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha y_\alpha$ und ϱ ein reeller variabler Parameter ist, geschrieben werden:

$$|-S+\varrho E| = |-A \cdot B+\varrho E| = |A| \cdot |-B+\varrho A^{-1}|.$$

Mithin hat also $|\varrho E - S|$ dieselben Elementartheiler wie die Determinante der aus *Hermite*schen Formen gebildeten Formenschar $\varrho A^{-1} - B$; ich bemerke noch, dass für jede *Hermite*sche Form A, wenn $|A|$ von Null verschieden ist, die *Hermite*sche Form A^{-1}, welche die reciproke Form von A ist, denselben Trägheitsindex wie A besitzt. Wenn $|B|$ von Null verschieden ist, so wird: $|\varrho E - S| = |\varrho E - A.B| = |\varrho B^{-1} - A| . |B|$, also hat $|\varrho E - S|$ dieselben Elementartheiler wie $|\varrho B^{-1} - A|$. Auf jeden Fall kann mithin die Frage nach den Elementartheilern der charakteristischen Function dieser speciellen Formengattung S auf die Untersuchung der Determinante einer Schar *Hermite*scher Formen zurückgeführt werden.

---

*) *G. Frobenius,* dieses Journal Bd. 84.

**) Vergl. *S. Gundelfinger,* Kegelschnitte, S. 70.

Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle.

(Fortsetzung der Arbeit im 120. Band, S. 1—26.)

(Von Herrn *J. Horn* in Charlottenburg.)

Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1.) \qquad x^{k+1}\frac{dy}{dx} = (1+a_1x+\cdots+a_kx^k)y+b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

besitzt, wenn a_k keine ganze Zahl ist, ein in der Umgebung von $x=0$ eindeutiges Integral

$$y = P(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} p_\lambda x^\lambda,$$

welches in den verschiedenen Theilen der Umgebung von $x=0$ verschiedene asymptotische Darstellungen

$$P(x) \backsim c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots - A_m e^{\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k}$$

zulässt, wo

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

die der Differentialgleichung (1.) formell genügende, im allgemeinen divergente Potenzreihe darstellt, während $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ die in § 2 eingeführten Constanten sind*). In § 4 wird gezeigt, *dass sich die Coefficienten p_λ der in der Umgebung von $x=0$ convergenten Reihenentwickelung von $P(x)$ durch die in den asymptotischen Darstellungen enthaltenen Grössen $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ und $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ausdrücken lassen*. Dasselbe gilt, wenn a_k eine ganze Zahl ist, für die in dem Integral

$$y = P(x)+Be^{\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k}\log x$$

*) Die Grössen $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ lassen sich wie die im Fall eines ganzzahligen a_k eingeführte Constante B durch die Bd. 120 S. 12 definirten Integrale $\omega_1, \ldots, \omega_k$ ausdrücken (S. 13 und 16).

enthaltene in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Function $P(x)$. In § 5 wird die in § 3 begonnene Verwendung der asymptotischen Darstellungen zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale in der Umgebung der Unbestimmtheitsstelle $x = 0$ unter Heranziehung der Theorie der ganzen transcendenten Functionen fortgesetzt.

§ 4.

Die oben erwähnte asymptotische Darstellung des Integrals $P(x)$ der Differentialgleichung (1.) unter der Voraussetzung, dass a_k keine ganze Zahl ist, hat folgende Bedeutung. Setzt man, unter n eine beliebige ganze positive Zahl verstehend,

$$P(x) = -A_m e^{\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}} x^{-a_k} + c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \varepsilon_n^{(m)} x^n \qquad (m = 0, 1, \ldots, k-1),$$

so nähert sich die Function $\varepsilon_n^{(m)}$ gleichmässig der Grenze Null, wenn die Veränderliche x in dem Sector $\mathfrak{S}_m$*)

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k} + \delta < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k} - \delta \qquad (m = 0, 1, \ldots, k-1)$$

in die Unbestimmtheitsstelle $x = 0$ geht.

Es giebt ausser $P(x)$ keine in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Function, welcher diese Eigenschaft zukommt. Bei der Herleitung der *Laurent*schen Reihe

$$P(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} p_\lambda x^\lambda \tag{23.}$$

aus dem *Cauchy*schen Integralsatz hat man nämlich

$$p_\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{P(x)dx}{x^{\lambda+1}} \qquad (\lambda = -\infty \cdots \infty),$$

wo das Integral über einen Kreis $\mathfrak{C}$ vom Mittelpunkt $x = 0$ und von hinreichend kleinem Radius r zu erstrecken ist. Wir ersetzen den Kreis $\mathfrak{C}$ durch die nach einander zu durchlaufenden Integrationswege $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$; der Weg s_m besteht aus der den Punkt $x = 0$ mit $x = re^{\frac{(2m-1)\pi}{k}}$ verbindenden Geraden, einem Kreisbogen vom Mittelpunkt $x = 0$, welcher die Punkte $x = re^{\frac{(2m-1)\pi}{k}}$ und $x = re^{\frac{(2m+1)\pi}{k}}$ verbindet, und einer von letzterem Punkte

*) Dabei ist δ eine beliebig kleine positive Grösse.

nach $x=0$ gehenden Geraden. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathfrak{g}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)\,x^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x}.$$

Dann ist für $\lambda=0,1,2,\ldots$

$$p_\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{k-1}A_m\int_{s_m}e^{\mathfrak{g}\left(\frac{1}{x}\right)}x^{-a_k-\lambda-1}dx+\frac{c_0}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}}\frac{dx}{x^{\lambda+1}}+\cdots+\frac{c_{\lambda-1}}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}}\frac{dx}{x^2}$$
$$+\frac{c_\lambda}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}}\frac{dx}{x}+\frac{c_{\lambda+1}}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}}dx+\frac{1}{2i\pi}\sum_{m=0}^{k-1}\int_{s_m}\varepsilon_{\lambda+1}^{(m)}dx;$$

dabei ist die oben eingeführte Zahl n gleich $\lambda+1$ angenommen. Ist ε eine beliebig kleine positive Grösse, so kann man den Radius r von $\mathfrak{C}$ so klein annehmen, dass auf s_m

$$|\varepsilon_{\lambda+1}^{(m)}|<\varepsilon,$$

also das Integral

$$\int_{s_m}\varepsilon_{\lambda+1}^{(m)}dx$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als die mit ε multiplicirte Länge des Integrationsweges s_m ist; da dieses Integral bei der Verkleinerung von r ungeändert bleibt, so ist es gleich Null. Es ist daher

$$(24.)\qquad p_\lambda=-\frac{1}{2i\pi}\sum_{m=0}^{k-1}A_m\int_{s_m}e^{\mathfrak{g}\left(\frac{1}{x}\right)}x^{-a_k-\lambda-1}dx+c_\lambda \qquad (\lambda=0,1,2,\ldots).$$

Für $\lambda=-1,-2,-3,\ldots$ schreiben wir

$$p_\lambda=-\frac{1}{2i\pi}\sum_{m=0}^{k-1}\int_{s_m}e^{\mathfrak{g}\left(\frac{1}{x}\right)}x^{-a_k-\lambda-1}dx$$
$$+\frac{c_0}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}}x^{-\lambda-1}dx+\frac{1}{2i\pi}\sum_{m=0}^{k-1}\int_{s_m}\varepsilon_0^{(m)}x^{-\lambda-1}dx.$$

Da

$$\int_{s_m}\varepsilon_0^{(m)}x^{-\lambda-1}dx,$$

wenn $-\lambda-1\geqq 0$ ist, durch hinreichend kleine Wahl von r beliebig klein wird, so hat man

$$(25.)\qquad p_\lambda=-\frac{1}{2i\pi}\sum_{m=0}^{k-1}A_m\int_{s_m}e^{\mathfrak{g}\left(\frac{1}{x}\right)}x^{-a_k-\lambda-1}dx \qquad (\lambda=-1,-2,\ldots).$$

Ist a_k eine ganze Zahl, so hat die in § 2 eingeführte in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Function $P(x)$, welche jetzt freilich erst nach Addition von

$$B e^{\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k} \log x$$

ein Integral von (1.) darstellt, die durch die Gleichung

$$P(x) = -(A_m + B\log x) e^{\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k} + c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \varepsilon_n^{(m)} x^n$$

dargestellte Eigenschaft, wo $\varepsilon_n^{(m)}$ dasselbe Verhalten zeigt wie oben. Aehnlich wie vorhin findet man

$$(26.)\quad p_\lambda = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{m=0}^{k-1} \int_{s_m} (A_m + B\log x) e^{\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k-\lambda-1} dx + c_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(27.)\quad p_\lambda = -\frac{1}{2i\pi} \sum_{m=0}^{k-1} \int_{s_m} (A_m + B\log x) e^{\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k-\lambda-1} dx \quad (\lambda = -1, -2, \ldots).$$

Wir haben den Satz:

Wenn a_k keine ganze Zahl ist, so lässt sich das in der Umgebung von $x = 0$ eindeutige Integral der Differentialgleichung (1.) *vermittelst der Formeln* (23.), (24.), (25.) *aus der asymptotischen Darstellung herleiten. Ist a_k eine ganze Zahl, so hat die Differentialgleichung* (1.) *das Integral*

$$y = P(x) + B e^{\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k} \log x,$$

wo $P(x)$ vermittelst der Formeln (23.), (26.), (27.) *gebildet wird.*

§ 5.

Am Schluss von § 3 wurde eine Factorenzerlegung von $P(x)$ gegeben, die wir unter geringfügiger Aenderung der Bezeichnung folgendermassen schreiben:

$$P(x) = C x^s G\left(\frac{1}{x}\right) \mathfrak{P}(x);$$

dabei ist $\mathfrak{P}(x)$ eine für $|x| < r$ nicht verschwindende Potenzreihe ($\mathfrak{P}(0) = 1$), und

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = e^{g\left(\frac{1}{x}\right)} \Pi\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\Pi\left(\frac{1}{x}\right) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{x}\right) e^{\frac{\varepsilon_\nu}{x} + \frac{\varepsilon_\nu^2}{2x^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_\nu^k}{k x^k}}$$

eine ganze transcendente Function von $\frac{1}{x}$ vom Geschlecht $k(g(0)=0)$, welche sämmtliche Nullstellen ε_ν von $P(x)$ besitzt, deren absoluter Betrag kleiner als r ist; C ist eine Constante und s eine ganze Zahl. Diese Factorenzerlegung hängt von der positiven Grösse r ab, welche kleiner sein muss als der Convergenzradius von $P(x)$, aber sonst beliebig gewählt werden kann. Es möge untersucht werden, ***wie sich die Factorenzerlegung von $P(x)$ ändert, wenn r verkleinert wird.***

Es sei r_1 eine beliebige positive Grösse kleiner als r und

$$P(x) = C_1 x^{s_1} G_1\left(\frac{1}{x}\right) \mathfrak{P}_1(x)$$

die entsprechende Zerlegung. Diejenigen unter den Grössen ε_ν, deren absoluter Betrag $< r$ und $\geqq r_1$ ist, seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$. Dann ist, wenn

$$G_1\left(\frac{1}{x}\right) = e^{g_1\left(\frac{1}{x}\right)} \Pi_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

gesetzt wird,

$$\Pi_1\left(\frac{1}{x}\right) = \prod_{\nu=\mu+1}^{\infty} \left(1-\frac{\varepsilon_\nu}{x}\right) e^{\frac{\varepsilon_\nu}{x}+\frac{\varepsilon_\nu^2}{2x^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_\nu^k}{kx^k}}.$$

Man hat

$$\Pi\left(\frac{1}{x}\right) = \Pi_1\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{\varepsilon_1}{x}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_\mu}{x}\right) e^{\sum_{\nu=1}^{\mu}\left(\frac{\varepsilon_\nu}{x}+\frac{\varepsilon_\nu^2}{2x^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_\nu^k}{kx^k}\right)},$$

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\left(1-\frac{x}{\varepsilon_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\varepsilon_\mu}\right)},$$

also

$$C_1 = (-1)^\mu \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu \cdot C,$$

$$s_1 = s-\mu,$$

$$g_1\left(\frac{1}{x}\right) = g\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_\mu}{x}+\frac{\varepsilon_1^2+\cdots+\varepsilon_\mu^2}{2x^2}+\cdots+\frac{\varepsilon_1^k+\cdots+\varepsilon_\mu^k}{kx^k}.$$

Es ist also $\lim s = -\infty$ ***für*** $\lim r = 0$.

Herr *Borel**) nennt eine ganze transcendente Function $G(x)$ mit den Nullstellen $a_i (i = 1, 2, \ldots)$ von der Ordnung (ordre réel) k, wenn

$$\Sigma \frac{1}{|a_i|^{k-\varepsilon}}$$

*) Act. math. Bd. 20.

divergent,

$$\sum \frac{1}{|a_i|^{k+\varepsilon}}$$

convergent ist, so klein auch die positive Grösse ε sein möge. Ist k keine ganze Zahl, so ist das Geschlecht von $G(x)$ die nächst kleinere ganze Zahl; im Fall eines ganzzahligen k ist das Geschlecht gleich k oder gleich $k-1$. Ferner sei $M(r)$ das Maximum des absoluten Betrages von $G(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$; $G(x)$ ist von der scheinbaren Ordnung (ordre apparent) k, wenn nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Zahl ε für alle hinreichend grossen Werthe von r

$$e^{r^{k-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^{k+\varepsilon}}$$

ist. Wenn die scheinbare Ordnung keine ganze Zahl ist, stimmt die wirkliche Ordnung mit der scheinbaren überein. (Für uns kommt nur der Fall einer endlichen Ordnung in Betracht).

Die Schlussweise von § 3 (Bd. 120, S. 23) ergiebt, dass die Reihe

$$\sum_\nu |\varepsilon_\nu|^{k-\varepsilon}$$

divergirt, die Reihe

$$\sum_\nu |\varepsilon_\nu|^{k+\varepsilon}$$

convergirt, so klein auch die positive Zahl ε angenommen wird. Demnach ist die bei der Factorenzerlegung von $P(x)$ eingeführte *ganze transcendente Function* $G\left(\frac{1}{x}\right)$ *von der wirklichen Ordnung* k. Dass sie *von der scheinbaren Ordnung* k *ist,* folgt unmittelbar aus der asymptotischen Darstellung von $P(x)$. Bezeichnet man das Maximum von $P(x)$ auf dem Kreise $|x| = \varrho$ mit $M(\varrho)$, so ist, wenn ε eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet,

$$e^{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k-\varepsilon}} < M(\varrho) < e^{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{k+\varepsilon}},$$

wenn ϱ hinreichend klein angenommen wird. Man sieht, dass diese Eigenschaft von $P(x)$ auch der Function $G\left(\frac{1}{x}\right)$ zukommt.

Im Anschluss daran möge noch der Charakter der ganzen transcendenten Function

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_{\sigma-\lambda}\left(\frac{1}{x}\right)^\lambda$$

untersucht werden, welche in der Zerlegung

$$P(x) = x^\sigma \left(F\left(\frac{1}{x}\right) + \mathfrak{P}(x)\right)$$

erscheint, wo σ eine beliebige ganze Zahl und $\mathfrak{P}(x)$ eine für $x=0$ verschwindende Potenzreihe von x darstellt. Wir haben

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = x^{-\sigma}P(x) - \mathfrak{P}(x) = x^{-\sigma}\eta_m - \mathfrak{P}(x) - A_m e^{\frac{1}{kx^k} + \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} + \cdots} x^{a_k - \sigma};$$

da η_m im Sector $\mathfrak{S}_m$ durch die als divergent vorausgesetzte Reihe

$$S = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

asymptotisch dargestellt wird, so geht die Gleichung

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

durch Multiplication oder Division mit einer geeigneten Potenz von x über in

$$A_m e^{\frac{1+\alpha}{kx^k}} = c + \gamma,$$

wo c eine von Null verschiedene Constante ist und α und γ Functionen von x, welche sich der Grenze Null nähern, wenn x im Sector $\mathfrak{S}_m$ nach der Stelle $x=0$ geht. Hieraus ergeben sich wie in § 3 die in dem betrachteten Sector gelegenen Nullstellen von $F\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$x_\lambda = \frac{1+\varepsilon_\lambda}{\sqrt[k]{k\left(\log\frac{c}{A_m} + 2\lambda\pi i\right)}}, \quad \lim_{\lambda=\pm\infty}\varepsilon_\lambda = 0.$$

Wie früher findet man, dass *auch* $F\left(\frac{1}{x}\right)$ *eine ganze transcendente Function von* $\frac{1}{x}$ *vom Geschlecht* k *und von der Ordnung* k *ist.*

In § 3 waren die in der Nähe der Unbestimmtheitstelle $x=0$ liegenden Wurzeln der Gleichung

$$P(x) = c_0 - c$$

in folgender Form dargestellt:

$$x_\lambda^{(m)} = \frac{1+\varepsilon_\lambda^{(m)}}{\sqrt[k]{k\left(\log\frac{c}{A_m} + 2\lambda\pi i\right)}} \qquad (m = 0, 1, \ldots, k-1),$$

$$\lim_{\lambda=\pm\infty}\varepsilon_\lambda^{(m)} = 0.^*)$$

Wie in meinem Aufsatze „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung II“

*) Ist $A_m = 0$, so fallen die Wurzeln $x_\lambda^{(m)}$ fort. Im Fall $c=0$ tritt die in Bd. 120, S. 21 angegebene Abänderung ein. Ist a_k eine ganze Zahl, so erscheinen die Wurzeln der Gleichung

$$P(x) + Be^{\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k}\log x = c_0 - c$$

in der obigen Form.

(Math. Ann. Bd. 49, S. 473ff) für die Nullstellen der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten, so lassen sich auch hier *für die Wurzeln* $x_\lambda^{(m)}$ *asymptotische Darstellungen in Form unendlicher Reihen* aufstellen. Die hierzu erforderliche Verallgemeinerung der früheren Untersuchung möge im Anschluss an den erwähnten Aufsatz kurz dargestellt werden*).

Ersetzt man $P(x)$ durch den in dem Sector

$$\frac{(4m-3)\pi}{2k} < \arg x < \frac{(4m+3)\pi}{2k}$$

gültigen asymptotischen Ausdruck, so geht die Gleichung $P(x) = c_0 - c$ über in

$$c + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots - A_m e^{\beta\left(\frac{1}{x}\right)} x^{-a_k} = 0$$

oder

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{k x^k} + \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x} - a_k \log x - 2\lambda\pi i - \log\frac{c}{A} - \sum_{\nu=1}^{\infty} K_\nu x^\nu = 0,$$

wo λ eine positive oder negative ganze Zahl darstellt und

$$K_1 x + K_2 x^2 + \cdots = \log\left(1 + \frac{c_1 x + c_2 x^2 + \cdots}{c}\right)$$

ist. Zur formalen Auflösung dieser Gleichung setzen wir

$$t = \frac{1}{\sqrt[k]{k\left(\log\frac{c}{A_m} + 2\lambda\pi i\right)}}, \quad x = t(1+\xi),$$

und zwar soll

$$\lim_{\lambda=+\infty} \arg t = \frac{(4m-1)\pi}{2k}, \quad \lim_{\lambda=-\infty} \arg t = \frac{(4m+1)\pi}{2k}$**)$$

sein. Durch Multiplication mit t^k geht $\varphi_\lambda(x) = 0$ über in

$$-\xi(1 + a_1 t + \cdots + a_k t^k + \cdots) + \cdots + \frac{a_1}{k-1} t + \cdots + a_{k-1} t^{k-1} - a_k t^k \log t + \cdots = 0.$$

Hieraus ergiebt sich durch formale Rechnung ξ als Potenzreihe von t und $z = t^k \log t$:

$$\xi = \sum_{p+q>0} C_{pq} t^p z^q;$$

---

*) Aehnlich wie im Folgenden ergeben sich (im Anschluss an meinen Aufsatz Act. math. Bd. 23) asymptotische Reihen für die in der Nähe der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ gelegenen Nullstellen der Integrale der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^{k-1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots\right)\frac{dy}{dx} + x^{2(k-1)}\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots\right)y = 0.$$

**) Bd. 120, S. 23, Zeile 2 sind $\lim_{\lambda=+\infty}$ und $\lim_{\lambda=-\infty}$ zu vertauschen.

die Coefficienten $C_{pq}(p \leqq k)$ hängen von $K_1, K_2, \ldots$ überhaupt nicht ab, $C_{pq}(p \leqq n+k)$ nur von $K_1, \ldots, K_p$. Demnach ist formal

$$x = t + \Sigma C_{pq} t^{p+1} z^q.$$

Die Auflösung der Gleichung

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{kx^k} + \frac{a_1}{(k-1)x^{k-1}} + \cdots - a_k \log x - 2\lambda\pi i - \log\frac{c}{A_m} - \sum_{\nu=1}^{n} K_\nu x^\nu = 0$$

führt auf die für hinreichend kleine Werthe von $|t|$ und $|z|$ convergente Reihe

$$X_\lambda = t + \Sigma \bar{C}_{pq} t^{p+1} z^q,$$

welche, wenn $|\lambda|$ hinreichend gross ist, eine Wurzel X_λ der Gleichung $\Phi_\lambda(x) = 0$ darstellt. Es ist

$$\bar{C}_{pq} = C_{pq} \quad (p \leqq n+k).$$

Wir beschreiben um X_λ einen Kreis C_λ vom Radius $\varepsilon|\lambda|^{-\frac{n+k+1}{k}}$, wo ε eine beliebig kleine positive Grösse ist. Wir zeigen, dass

$$\int_{\mathfrak{C}_\lambda} (d\log\varphi_\lambda - d\log\Phi_\lambda) = 0$$

ist, wenn $|\lambda|$ hinreichend gross ist, woraus folgt, dass innerhalb $\mathfrak{C}_\lambda$ eine einzige Wurzel der Gleichung $\varphi_\lambda(x) = 0$ liegt. Es ist nämlich

$$\frac{d\log\varphi_\lambda}{dx} - \frac{d\log\Phi_\lambda}{dx} = -\frac{x^{n-1}(n\varkappa_n + x\varkappa_n')\Phi_\lambda + \varkappa_n x^n \Phi_\lambda'}{\Phi_\lambda(\Phi_\lambda - \varkappa_n x^n)},$$

wo sich $\varkappa_n$ und $x\varkappa_n'$ der Null nähern, wenn x in dem betrachteten Sector nach der Stelle $x = 0$ geht. Auf dem Kreise $\mathfrak{C}_\lambda$ ist

$$\Phi_\lambda(x) = \Phi_\lambda(X_\lambda + \varepsilon|\lambda|^{-\frac{n+k+1}{k}} e^{i\vartheta}) - \Phi_\lambda(X_\lambda) = \Phi'(X_\lambda)\varepsilon|\lambda|^{-\frac{n+k+1}{k}} e^{i\vartheta} + \cdots$$

$$= -\frac{\varepsilon|\lambda|^{-\frac{n+k+1}{k}} e^{i\vartheta}}{X_\lambda^{k+1}} + \cdots,$$

also, wenn $|\lambda|$ hinreichend gross ist,

$$\left|\lambda^{\frac{n}{k}} \Phi_\lambda\right| > \varepsilon g,$$

wo g eine positive Grösse darstellt. Ferner kann man

$$\left|\lambda^{\frac{n}{k}} (\Phi_\lambda - \varkappa_n x^n)\right| < \frac{1}{2}\varepsilon g$$

machen, so dass der mit $\lambda^{\frac{2n}{k}}$ multiplicirte Nenner des zu integrirenden Bruches dem absoluten Betrage nach grösser als $\frac{1}{2}\varepsilon^2 g^2$ ist. Schliesslich kann man, wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet, $|\lambda|$ so gross wählen, dass der absolute Betrag des mit $|\lambda|^{\frac{n-k-1}{k}}$ multiplicirten Zählers kleiner ist als $\frac{1}{2}\delta\varepsilon g^2$. Da die Länge des Integrationsweges $\mathfrak{C}_\lambda$ gleich $2\pi\varepsilon|\lambda|^{-\frac{n+k+1}{k}}$ ist, so ist der absolute Betrag des Integrals kleiner als $2\pi\delta$, d. h. beliebig klein, wenn $|\lambda|$ hinreichend gross ist, was zu beweisen war.

Bezeichnet man die innerhalb $\mathfrak{C}_\lambda$ gelegene Wurzel der Gleichung $\varphi_\lambda(x) = 0$ mit x_λ, so ist

$$\left|\lambda^{\frac{n+k+1}{k}}(x_\lambda - X_\lambda)\right| < \varepsilon.$$

Setzt man

$$x_\lambda = t + \Sigma C_{pq} t^{p+1} z^q + \varepsilon_\lambda t^{p+kq+1} \qquad (p+kq \leqq n+k),$$

so ist

$$\lim_{\lambda=\pm\infty} \varepsilon_\lambda = 0.$$

Wir benutzen die Bezeichnung

$$k \log \frac{c}{A_m} = h_m,$$

so dass

$$t = \frac{1}{\sqrt[k]{h_m + 2k\lambda\pi i}},$$

$$z = -\frac{\log(h_m + 2k\lambda\pi i)}{k(h_m + 2k\lambda\pi i)}$$

wird, und setzen noch

$$A_{pq} = \left(-\frac{1}{k}\right)^q C_{pq}.$$

Dann erscheinen die Wurzeln der Gleichung $P(x) = c_0 - c$ in der Form

$$x_\lambda^{(m)} = \frac{1}{\sqrt[k]{h_m + 2k\lambda\pi i}} + \Sigma A_{pq} \frac{[\log(h_m + 2k\lambda\pi i)]^q}{(h_m + 2k\lambda\pi i)^{\frac{p+kq+1}{k}}} \qquad (p+kq \leqq n+k)$$

$$+ \frac{\varepsilon_\lambda^{(m)}}{(h_m + 2k\lambda\pi i)^{\frac{p+kq+1}{k}}}, \quad \lim_{\lambda=\pm\infty} \varepsilon_\lambda^{(m)} = 0.$$

Dabei ist

$$\lim_{\lambda=+\infty} \arg(h_m + 2k\lambda\pi i) = -\frac{(4m-1)\pi}{2},$$

$$\lim_{\lambda=-\infty} \arg(h_m + 2k\lambda\pi i) = -\frac{(4m+1)\pi}{2},$$

so dass

$$\lim_{\lambda=+\infty} \arg x_\lambda^{(m)} = \frac{(4m-1)\pi}{2k}, \quad \lim_{\lambda=-\infty} \arg x_\lambda^{(m)} = \frac{(4m+1)\pi}{2k}$$

für $m = 0, 1, \ldots, k-1$ wird.

Ueber die Elementartheiler componirter Systeme.

(Nach einer brieflichen Mittheilung von Herrn *K. Hensel*.)

(Von Herrn *P. Muth* in Osthofen.)

Gelegentlich der Analyse des interessanten Beweises, den Herr *Hensel* in diesem Journale (1894) Bd. 114, S. 109ff. für den Fundamentalsatz über die Elementartheiler componirter Systeme aus ganzen Grössen gegeben hat, bemerkte ich, dass der Beweis insofern einer Ergänzung bedarf, als der Fall unberücksichtigt geblieben ist, wo $p = 0$ ist. Auf eine Anfrage bei Herrn *Hensel* hin hatte dieser die Güte, mir noch an demselben Tage den fehlenden Beweis zukommen zu lassen; denselben theile ich mit Zustimmung des Autors im Folgenden mit.

Der *Hensel*sche Beweis a. a. O. gilt mit einigen Modificationen auch dann, wenn das System B Vielfaches eines Systems A aus *ganzen oder gebrochenen* Grössen ist. Die nachstehende Ergänzung hingegen wird gleich für den Fall vorgenommen, dass A aus ganzen oder gebrochenen Elementen besteht. Um die Verständlichkeit zu erhöhen, werde ich mir erlauben, mitunter auf meine „Theorie und Anwendung der Elementartheiler“ *) hinzuweisen.

Es handelt sich dabei um Folgendes: *Ist*

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

ein System aus n^2 ganzen oder gebrochenen Grössen eines Körpers von Zahlen

*) Leipzig, Teubner, 1899. Kurz citirt mit ET.

oder Functionen, so soll gezeigt werden, dass der ϱ-te Elementartheiler des Systems

$$\mathfrak{R}' = \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Vielfaches des ϱ-ten Elementartheilers des Systems $\mathfrak{R}$ ***ist.*** (ET. S. 225.)

Beweis. Wir führen denselben zunächst für den Fall, dass die a_{ik} ganze oder gebrochene ***rationale*** Zahlen sind; unter p verstehen wir eine Primzahl, den Rang von $\mathfrak{R}'$ bezeichnen wir mit r. Es ist r höchstens gleich dem Range von $\mathfrak{R}$.*) Ist alsdann der 1-te, 2-te, ..., r-te Elementartheiler von $\mathfrak{R}'$ mod. p bezw. gleich

$$p^{\delta_1}, \quad p^{\delta_2}, \quad \dots, \quad p^{\delta_r},$$

so kann man durch alleinige Anwendung von Elementartransformationen in Bezug auf p $\mathfrak{R}'$ in das System

$$\mathfrak{R}_1' = \begin{Vmatrix} 0 & p^{\delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p^{\delta_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & p^{\delta_r} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

überführen, wo $\delta_1, \dots, \delta_r$ positive oder negative ganze Zahlen bezw. Null sind, und $\delta_i \geqq \delta_{i-1}$ ist (ET. S. 226—227). Wendet man dieselben Transformationen auf das System $\mathfrak{R}$ an, so geht es in ein System von der Gestalt

$$\mathfrak{R}_1 = \begin{Vmatrix} e_1 & p^{\delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e_2 & 0 & p^{\delta_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_r & 0 & \dots & \dots & p^{\delta_r} \dots & 0 \\ e_{r+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

*) Man erkennt leicht, dass der Rang von $\mathfrak{R}$ entweder gleich r oder gleich $r+1$ ist.

über. Wir setzen jetzt $e_i = p^{\varepsilon_i} e_i'$, wo die Primzahl p weder im Nenner noch im Zähler von e_i' als Factor auftreten soll. Ferner bezeichnen wir die k-te Spalte (Zeile) eines beliebigen Systems kurz mit $V_k(H_k)$. Ist nun ε_1 nicht die kleinste der Zahlen ε_i, sondern z. B. $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, so addiren wir die H_2 zu H_1, multipliciren im neuen Systeme die V_2 mit $p^{\delta_2-\delta_1}$ und subtrahiren sie dann von der V_3 und erhalten durch diese Elementartransformationen in Bezug auf p ein System, in welchem die H_1 gleich

$$e_1+e_2, \quad p^{\delta_1}, \quad 0 \ldots 0$$

ist; e_1+e_2 ist aber genau durch die ε_2-te Potenz von p theilbar. Das System hat wieder die Gestalt von $\mathfrak{R}_1$, aber jetzt ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. So fortfahrend, schaffen wir uns ein System von der Gestalt des Systems $\mathfrak{R}_1$, in welchem aber jetzt

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \ldots \leqq \varepsilon_n$$

ist. Wenn in diesem Systeme $\mathfrak{R}_1$ $\varepsilon_1 > \delta_1$ ist, so addiren wir die V_2 zur V_1 und erhalten ein System, in welchen — bei unserer früheren Bezeichnung — $\varepsilon_1 = \delta_1$ ist. Analog verfahren wir mit ε_2 und δ_2, ε_3 und δ_3 u. s. w. Dieses führt zu einem Systeme $\mathfrak{R}_1$, in dem

$$(1.) \qquad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \ldots \leqq \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_1 \leqq \delta_1, \qquad \varepsilon_2 \leqq \delta_2, \ \ldots, \ \varepsilon_r \leqq \delta_r$$

ist.

Nun verlangen wir aber noch weiter, dass

$$(2.) \quad \varepsilon_2-\varepsilon_1 \leqq \delta_2-\delta_1, \qquad \varepsilon_3-\varepsilon_2 \leqq \delta_3-\delta_2, \ \ldots, \ \varepsilon_r-\varepsilon_{r-1} \leqq \delta_r-\delta_{r-1}$$

ist. Falls dieses nicht von vorn herein der Fall, sondern z. B.

$$(3.) \qquad \varepsilon_2 > \delta_2-\delta_1+\varepsilon_1$$

ist, so multipliciren wir die H_1 mit $p^{\delta_2-\delta_1}$ und addiren sie zur H_2; im neuen Systeme subtrahiren wir die V_3 von der V_2 und erhalten ein System $\mathfrak{R}_1$, in welchem das jetzige e_2 gleich

$$e_2+e_1 p^{\delta_2-\delta_1} = e_2' p^{\varepsilon_2} + e_1' p^{\delta_2-\delta_1+\varepsilon_1}$$

ist; dasselbe ist wegen (3.) genau durch $p^{\delta_2-\delta_1+\varepsilon_1}$ theilbar, und somit ist jetzt $\varepsilon_2-\varepsilon_1 = \delta_2-\delta_1$. So weitergehend erhalten wir ein zu $\mathfrak{R}$ mod. p äquivalentes System $\mathfrak{R}_1$ (ET. S. 226), welches die Eigenschaften (1.) und (2.) besitzt.

Wir bestimmen jetzt den ϱ-ten Elementartheiler $E_\varrho(\mathfrak{R}_1)$ von $\mathfrak{R}_1$. Eine Subdeterminante ϱ-ten Grades S_ϱ des Systems $\mathfrak{R}_1$ ($\varrho \leqq r$) ist entweder mod. p gleich

$$p^{\delta_{\varkappa_1}+\delta_{\varkappa_2}+\cdots+\delta_{\varkappa_\varrho}}$$

oder gleich

$$P = p^{\delta_{\varkappa_1}+\delta_{\varkappa_2}+\cdots+\delta_{\varkappa_{\mu-1}}+\varepsilon_{\varkappa_\mu}+\delta_{\varkappa_{\mu+1}}+\cdots+\delta_{\varkappa_\varrho}},$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho$ gewisse der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ — in dieser Reihenfolge — vorstellen. Wegen $\delta_\varrho \geqq \delta_{\varrho-1}$ ist von den zuerst stehenden Potenzen von p die Potenz $p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\varrho}$ die ***niedrigste,*** und ferner zeigt man leicht, dass von den Potenzen P wiederum die $(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\varrho-1}+\varepsilon_\varrho)$-te diese Eigenschaft besitzt. Denn P wird verkleinert bezw. nicht vergrössert, wenn man für $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho$ bezw. $1, 2, \ldots, \varrho$ setzt, und von diesen kleinsten Exponenten

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\delta_\varrho &= d_1,\\
\delta_1+\varepsilon_2+\delta_3+\cdots+\delta_\varrho &= d_2,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot &\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot &\\
\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\varepsilon_\varrho &= d_\varrho
\end{aligned}$$

ist der letzte d_ϱ der niedrigste. Wegen (2.) ist nämlich für $i = 1, 2, \ldots, \varrho-1$

$$d_i - d_\varrho = (\varepsilon_i+\delta_\varrho)-(\delta_i+\varepsilon_\varrho) = (\delta_\varrho-\delta_i)-(\varepsilon_\varrho-\varepsilon_i) \geqq 0.$$

Endlich ist wegen (1.) $d_\varrho \leqq \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\varrho$. Bedeutet daher $D_\varrho(\mathfrak{R}_1)$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler der S_ϱ (ET. S. 224), so ist mod. p

$$\begin{aligned}
D_\varrho(\mathfrak{R}_1) &= p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\varrho-1}+\varepsilon_\varrho},\\
D_{\varrho-1}(\mathfrak{R}_1) &= p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\varrho-2}+\varepsilon_{\varrho-1}}
\end{aligned}$$

und somit mod. p

$$E_\varrho(\mathfrak{R}_1) = p^{\delta_{\varrho-1}+(\varepsilon_\varrho-\varepsilon_{\varrho-1})}.$$

Da aber die Systeme $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ mod. p äquivalent sind, so ist auch der ϱ-te Elementartheiler von $\mathfrak{R}$ mod. p gleich $p^{\delta_{\varrho-1}+\varepsilon_\varrho-\varepsilon_{\varrho-1}}$; der ϱ-te Elementartheiler $E_\varrho(\mathfrak{R}')$ von $\mathfrak{R}'$ ist aber mod. p gleich $p^{\delta_\varrho} = p^{\delta_{\varrho-1}+(\delta_\varrho-\delta_{\varrho-1})}$, ferner ist wegen (2.)

$$\delta_{\varrho-1}+(\delta_\varrho-\delta_{\varrho-1}) \geqq \delta_{\varrho-1}+(\varepsilon_\varrho-\varepsilon_{\varrho-1}),$$

und folglich muss

$$\frac{E_\varrho(\mathfrak{R}')}{E_\varrho(\mathfrak{R})}$$

eine mod. p ganze Zahl sein; p war aber eine beliebige Primzahl, weshalb $\frac{E_\varrho(\mathfrak{R}')}{E_\varrho(\mathfrak{R})}$ eine ***absolut ganze Zahl*** ist, was zu beweisen war.

Der Beweis bleibt Wort für Wort bestehen, wenn man unter den a_{ik} in $\mathfrak{R}$ ganze oder gebrochene Functionen einer oder mehrerer Variabeln oder ganze oder gebrochene Grössen eines Körpers von Zahlen oder Functionen und entsprechend unter p eine lineare bez. irreductibele Function oder einen wirklichen bez. idealen Primtheiler versteht.

Bemerkung zu der Arbeit „Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichungen“ Seite 43—52 dieses Bandes.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Nikolsburg.)

Auf Seite 48 habe ich irrthümlicher Weise bemerkt, dass der Coefficient von z in der Differentialgleichung (12.) S. 47 gleich $(-1)^n p_n$ ist, was jedoch, wie unmittelbar zu sehen, nicht der Fall ist. Es verlieren deshalb die Formeln auf dieser Seite:

$$r_n = (-1)^n p_n, \quad p_n = \frac{D(z_1', z_2', \ldots, z_n')}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)},$$

$$\text{(16.)} \qquad \frac{D(z_1', z_2', \ldots, z_n')}{D(z_1, z_2, \ldots, z_n)} = (-1)^n \cdot \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

$$\text{(17.)} \qquad D(z_1', z_2', \ldots, z_n') = (-1)^n \cdot \frac{D(y_1', y_2', \ldots, y_n')}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)^2}$$

und

$$D(u_1', u_2', \ldots, u_n') = D(z_1', z_2', \ldots, z_n') \cdot p_n^{n-1}$$

ihre Gültigkeit.

Nikolsburg, am 29. März 1900.

Ueber alternirende Formen.

(Von Herrn *P. Muth* in Osthofen, Rheinhessen.)

Bekanntlich hat ***Kronecker*** in einer „Reduction der Systeme mit n_2 ganzzahligen Elementen“ betitelten Note*) die Reduction einer bilinearen Form mit ganzzahligen Coefficienten in einfachster Weise erledigt. Das principiell Neue der hier entwickelten Methode besteht darin, dass nicht mit der zu reducirenden ***Form,*** sondern mit dem ***Coefficientensysteme*** derselben operirt wird. Dieses wird in höchst einfacher Weise umgeformt: Reihen werden mit parallelen Reihen vertauscht, zu parallelen Reihen addirt u. s. w. Diesen Transformationen des Systems entsprechen dann lineare Transformationen der Form. Der Reduction des Systems durch solche ***Elementartransformationen*** entspricht die Reduction der bilinearen Form durch eben solche Transformationen. Dieses ***Kronecker***sche Princip hat mit passender Erweiterung ausgedehnte Verwendung namentlich bei Untersuchungen über Elementartheiler gefunden. Wir werden es im Folgenden benutzen, um bekannte Resultate über alternirende Formen bez. Systeme theils ***neu herzuleiten,*** theils zu ***verallgemeinern.***

I.

Es sei

$$A = \Sigma a_{ik} x_i y_k \qquad (i,k = 1, 2, \ldots, n)$$

eine beliebige bilineare Form von $2n$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit dem Coefficientensysteme

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Bmatrix}.$$

*) Dieses Journal (1891) Bd. 107, S. 135—136. Vergl. auch ***Kronecker,*** Ueber symmetrische Systeme, Sitzungsberichte der Berl. Akademie 1889, S. 349ff. und ***Kronecker,*** Die Decomposition der Syst. u. s. w. am gl. Orte S. 479ff. u. S. 603ff.

Alsdann bezeichnen wir als ***Elementartransformationen*** T_1, T_2, T_3 ***des Systems*** $\mathfrak{A}$ folgende drei Umformungen desselben: 1. die Multiplication einer Reihe mit einer endlichen, von Null verschiedenen Constanten c, 2. die Vertauschung zweier parallelen Reihen, 3. die Multiplication einer Reihe mit einer endlichen, von Null verschiedenen Constanten m mit nachfolgender Addition (Subtraction) zu (von) einer parallelen Reihe.

Geht $\mathfrak{A}$ durch eine Transformation T_1 in $\mathfrak{A}'$ über, ist ferner A' die bilineare Form der x_i, y_i, deren Coefficientensystem — bei derselben Anordnung der Reihen wie oben — mit $\mathfrak{A}'$ identisch ist, so geht A' aus A dadurch hervor, dass eine Variable x_i oder y_k mit c multiplicirt wird, also in A $x_i = cx_i$ bez. $y_k = cy_k$ gesetzt wird. Analog entspricht jeder Transformation T_2 oder T_3 von $\mathfrak{A}$ eine bestimmte lineare Transformation der Form A.*) Diese Transformationen der ***Form*** A werden wir ebenfalls als ***Elementartransformationen*** T_1, T_2, T_3 bezeichnen.

Die Determinante einer linearen Transformation T_1 ist gleich c; die Transformationen T_2 und T_3 sind unimodular, d. h. sie haben den Modul -1 bez. 1.

Entsprechende Umformungen T_i, die mit den Zeilen und Spalten von $\mathfrak{A}$ vorgenommen werden, bezeichnen wir als ***congruente Transformationen*** T_i ***von*** $\mathfrak{A}$. Zu ihnen gehören ***congruente lineare Transformationen*** T_i von A. Da bei congruenter Transformation eine alternirende Form wieder in eine eben solche Form übergeht, so geht ein alternirendes System durch congruente Elementartransformationen in ein eben solches System über.

Durch lineare Transformation von A wird der Rang r von $\mathfrak{A}$ nicht geändert; daher bleibt bei den Umformungen T_i von $\mathfrak{A}$ der Rang von $\mathfrak{A}$ ungeändert.

Tritt bei einer Umformung von $\mathfrak{A}$ an Stelle des Elementes a_{ik} ein Element a'_{ik}, welches eine bestimmte Eigenschaft E hat, so sagen wir kurz, $\mathfrak{A}$ sei so umgeformt worden, dass das Element a_{ik} von $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft E habe.**) Ferner bezeichnen wir kurz die i-te Zeile (k-te Spalte) eines

*) Vergl. Artikel 27 meines Buches über Elementartheiler (Leipzig 1899). Der Kürze halber erlaube ich mir auch im Folgenden, wenn es nöthig erscheint, auf dasselbe zu verweisen. (Citirt mit ET.)

**) Wir bezeichnen m. a. W. in der Regel das umgeformte System wieder mit $\mathfrak{A}$, seine Elemente wieder mit a_{ik}.

Systems mit $Z_i(S_k)$. Dasjenige System, welches aus $\mathfrak{A}$ dadurch hervorgeht, dass die $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ und die $S_1, S_2, \ldots, S_k$ gestrichen werden, nennen wir *das k-te innere System* von $\mathfrak{A}$.

II.

Wir nehmen jetzt an, dass die *Form A* (das *System* $\mathfrak{A}$) *alternirend*, also

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{ii} = 0$$

sei. Da alle Hauptelemente in $\mathfrak{A}$ (ET. S. 14) Null sind, so steht ausserhalb der Hauptdiagonale ein von Null verschiedenes Element $a_{lm} = -a_{ml}$ $(l \gtrless m)$. Dieses bringen wir durch Transformationen 2) an Stelle von a_{12}; durch die congruenten Transformationen kommt dann a_{ml} an die Stelle von a_{21}. Jetzt multipliciren wir die S_2 des noch immer alternirenden Systems (I.) mit $\frac{a_{13}}{a_{12}}, \frac{a_{14}}{a_{12}}, \ldots$ und subtrahiren sie dann der Reihe nach von der $S_3, S_4, \ldots$; durch diese und die congruenten T_3 erhalten wir ein alternirendes System, worin *alle* Elemente der Z_1 und S_1, ausser a_{12} und a_{21}, Null sind. Indem wir weiter die S_1 mit $\frac{a_{23}}{a_{21}}, \frac{a_{24}}{a_{21}}, \ldots$ multipliciren und dann der Reihe nach von der $S_3, S_4, \ldots$ subtrahiren, erhalten wir — bei gleichzeitiger Vornahme der zu diesen T_3 congruenten T_3 — ein System von der Gestalt

$$(1.) \qquad \left\{\begin{array}{cccccc} 0 & a_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \ldots & a_{3n} \\ 0 & 0 & -a_{34} & 0 & \ldots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & -a_{3n} & -a_{4n} & \ldots & 0 \end{array}\right\}$$

Das zweite innere System dieses ebenfalls alternirenden Systems behandeln wir genau, wie eben das ganze System $\mathfrak{A}$. Setzen wir das Verfahren fort, so gelangen wir schliesslich zu einem Systeme $\mathfrak{A}'$, das — abgesehen von einem etwa auftretenden Theilsysteme mit lauter Elementen Null — in lauter Theilsysteme von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

wo $a \gtrless 0$, zerlegbar ist (ET. Art. 22). $\mathfrak{A}'$ hat, wenn $\varkappa$ solcher Theilsysteme

auftreten, den Rang $2z$; nun ist aber $2z$ auch der Rang von $\mathfrak{A}$. ***Der Rang eines alternirenden Systems ist eine gerade Zahl.****) Ferner können wir sagen (I.): Eine alternirende Form A, deren Coefficientensystem vom Range $r = 2z$ ist, kann durch ***congruente Elementartransformationen 2) und 3)*** auf die Gestalt

$$(2.) \qquad e_1(x_1y_2 - x_2y_1) + e_2(x_3y_4 - x_4y_3) + \cdots + e_z(x_{r-1}y_r - x_ry_{r-1})$$

und durch ***congruente Elementartransformationen 1), 2) und 3)*** auf die Gestalt

$$(3.) \qquad (x_1'y_2' - x_2'y_1') + (x_3'y_4' - x_4'y_3') + \cdots + (x_{r-1}'y_r' - x_r'y_{r-1}')$$

gebracht werden. Die Coefficienten *aller* dieser Substitutionen 1), 2) und 3) sind *rationale* Functionen der Coefficienten von A.

Das zuletzt Bemerkte ergiebt sich daraus, dass (2.) dadurch in (3.) übergeht, dass

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = \frac{1}{e_1}x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \frac{1}{e_2}x_4' \text{ u. s. w.}$$

$$y_1 = y_1', \quad y_2 = \frac{1}{e_1}y_2', \quad y_3 = y_3', \quad y_4 = \frac{1}{e_2}y_4' \text{ u. s. w.}$$

gesetzt wird. — Man folgert weiter:

Haben die Coefficientensysteme zweier alternirenden bilinearen Formen von je $2n$ Variablen A und B ***gleichen Rang,*** so kann man A in B durch *congruente* Substitutionen überführen, deren Coefficienten ***rational*** von denjenigen von A und B abhängen.**)

III.

In diesem Artikel setzen wir voraus, dass A eine ***alternirende Form mit ganzzahligen Coefficienten*** sei. Unter Elementartransformationen 1), 2) und 3) verstehen wir die in I beschriebenen Transformationen von A und $\mathfrak{A}$, nur dass jetzt ***stets*** bei den T_1 $c = -1$ und bei den T_3 für m eine ganze, positive oder negative, endliche Zahl ($\gtrless 0$) zu nehmen ist. Alle T_i sind also hier unimodular (ET. Art. 27). Wir werden jetzt A durch ***lauter congruente Elementartransformationen dieser Art*** auf die Gestalt (2.) bringen, wobei

---

*) Dies geht schon aus den Untersuchungen *Kroneckers* über die Congruenz der Formen (Monatsb. der Berlin. Acad. 1874, S. 397ff. [Werke Bd. I., S. 423ff.]) hervor. Vergl. ET. S. 151. Ausgesprochen und auf anderem Wege bewiesen wurde der Satz zuerst von Herrn *Frobenius*, d. Journ. (1877), Bd. 82, S. 242 (ET. S. 19).

**) Vergl. zu Obigem ET. S. 151.

$e_1, \ldots, e_x$ ***ganze positive Zahlen*** vorstellen derart, dass e_2 durch e_1, e_3 durch e_2, u. s. w., e_x durch e_{x-1} ***theilbar*** ist.

Zunächst machen wir durch congruente T_2 und T_1 a_{12} in $\mathfrak{A}$ positiv und kleiner, als der absolute Werth jedes der übrigen Elemente*) von $\mathfrak{A}$ beträgt. Steht dann in der Z_1 ein Element a_{1l} das nicht ganzes Vielfaches von a_{12} ist, so können wir a_{12} nach dem von ***Kronecker*** an dem zuerst citirten Orte beschriebenen Verfahren noch weiter verkleinern, indem wir durch Transformationen T_3 und T_2, vorgenommen mit der S_2 und S_l, an Stelle von a_{12} den grössten gemeinschaftlichen Theiler von a_{12} und a_{1l} bringen; dann ist a_{1l} durch a_{12} theilbar (ET. Art. 28). Zu diesen Transformationen der Spalten führen wir stets die congruenten der Zeilen aus. Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis jedes Element der Z_1 durch a_{12} theilbar ist; dann ist auch jedes Element der S_1 durch a_{12} theilbar, da $\mathfrak{A}$ alternirend geblieben ist. Alsdann machen wir durch congruente T_3 alle Elemente der Z_1 und S_1, ausser a_{12} und a_{21}, zu Null. Befindet sich jetzt in der Z_2 ein Element, das nicht durch a_{12} theilbar ist, so addiren wir die Z_2 zur Z_1, dann die S_2 zur S_1 und verkleinern das hierbei *ungeändert* gebliebene a_{12} weiter wie vorhin. Da aber a_{12} nicht kleiner werden kann, als der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Elemente des gegebenen Systems (ET. S. 48), so muss nach einer endlichen Anzahl von den vorbeschriebenen Operationen ein Moment eintreten, wo *alle* Elemente der Z_1 und S_1, ausser a_{12} und $a_{21} = -a_{12}$, ***Null,*** alle Elemente der Z_2 und S_2 aber durch a_{12} ***theilbar*** sind. Multipliciren wir jetzt die S_1 mit $\frac{a_{23}}{a_{12}}, \frac{a_{24}}{a_{12}}, \ldots, \frac{a_{2n}}{a_{12}}$, addiren sie dann zur $S_3, S_4, \ldots, S_n$ und nehmen hierauf die congruenten T_3 vor, so erhalten wir ein alternirendes System von der Gestalt (1.). Steht nun in einer $Z_i (i > 2)$ ein Element, welches nicht durch a_{12} theilbar ist, so addiren wir die betreffende Z_i zur Z_1, dann die S_i zur S_1; dabei blieben a_{12} und a_{21} ungeändert, und a_{12} kann jetzt nach dem früheren Verfahren weiter verkleinert werden, da in der Z_1 ein nicht durch a_{12} theilbares Element steht. U. s. w. Nach einer endlichen Anzahl von Operationen müssen wir zu einem Systeme von der Gestalt (1.) gelangen, in welchem a_{12} den grössten gemeinschaftlichen Theiler e_1 *aller* Elemente vorstellt. Das zweite innere System desselben behandeln wir dann, wie eben das gegebene System. U. s. w.

*) Natürlich können mehrere Elemente absolut gleich und kleiner als die übrigen sein. Dann bringen wir irgend eins derselben nach a_{12}.

So kommen wir zu einem Systeme $\mathfrak{A}'$, welches — ausser einem etwa auftretenden Theilsysteme aus lauter Elementen Null — in $\varkappa$ Theilsysteme

$$\begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ -e_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ -e_2 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & e_\varkappa \\ -e_\varkappa & 0 \end{pmatrix}$$

zerlegbar ist, wenn $r = 2\varkappa$ den Rang des gegebenen System bedeutet. Dabei ist e_2 durch e_1, e_3 durch $e_2, \ldots, e_\varkappa$ durch $e_{\varkappa-1}$ theilbar (ET. Art. 28).

Damit ist das zu Anfang dieses Artikels Behauptete bewiesen (I.). Bezeichnen wir den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten ϱ-ten Grades ($\varrho \leqq r$) von $\mathfrak{A}'$ mit D_ϱ, den ϱ-ten Elementartheiler von $\mathfrak{A}'$ mit E_ϱ, so ist

$$D_1 = e_1, \quad D_2 = e_1^2, \quad D_3 = e_1^2 e_2, \quad D_4 = e_1^2 e_2^2, \quad \ldots, \quad D_{r-1} = e_1^2 e_2^2 \ldots e_{\varkappa-1}^2 e_\varkappa,$$
$$D_r = e_1^2 e_2^2 \ldots e_\varkappa^2;$$

da D_ϱ für das gegebene System gleich D_ϱ für $\mathfrak{A}'$ ist, so gilt *der Satz, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ-ten Grades eines alternirenden ganzzahligen Systems bei geradem ϱ das Quadrat einer ganzen Zahl ist**).

Ferner ist, da $E_\varrho = \dfrac{D_\varrho}{D_{\varrho-1}}$ für $\varrho \leqq r$,

$$E_1 = e_1, \quad E_2 = e_1, \quad E_3 = e_2, \quad E_4 = e_2, \quad \ldots, \quad E_{r-1} = e_\varkappa, \quad E_r = e_\varkappa.$$

In einem alternirenden Systeme aus ganzen Zahlen ist also der $(2\lambda-1)$-te Elementartheiler dem 2λ-ten gleich, oder, wie man auch sagen kann (ET. S. 6), *die (einfachen) Elementartheiler eines solchen Systems treten stets paarweise auf.**) Wir können sagen:

Ist A eine alternirende Form mit ganzzahligen Coefficienten, ihr Coefficientensystem vom Range $r = 2\varkappa$, so lässt sich A *durch congruente Elementartransformationen* 1), 2) und 3) auf die Gestalt (2.) bringen, wo

$$e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots, e_\varkappa, e_\varkappa$$

bez. den *1-ten, 2-ten, ..., r-ten Elementartheiler* von $\mathfrak{A}$ bedeutet.**) Eine einfache, aber sehr bemerkenswerthe Folgerung hieraus ist, dass zwei äquivalente alternirende Formen mit ganzzahligen Coefficienten stets auch *congruent* sind.†)

IV.

Die Entwickelungen des letzten Artikels bleiben mit geringen Modificationen bestehen, wenn die Elemente des alternirenden Systems

---

*) *Frobenius,* d. J. (79), Bd. 86, S. 20ff., § 7.

**) Die Reduction einer alternirenden Form mit ganzen Coefficienten wurde zuerst von Herrn *Frobenius* l. c. mittelst einer anderen Methode ausgeführt.

†) *Frobenius*, l. c.

ganze Functionen einer Veränderlichen sind*) (ET. Art. 34). Der Satz über das paarweise Auftreten der Elementartheiler gilt auch für alternirende Systeme aus ganzen Functionen einer Variablen, woraus seine Giltigkeit für Systeme, deren Elemente binäre Formen gleichen Grades sind, ohne weiteres folgt (ET. Art. 37). Ein Specialfall des letzteren Satzes ist derjenige, dass die Elementartheiler des Coefficientensystems einer *Schar mit alternirenden Grundformen* stets paarweise auftreten.**) Die zuletzt genannten Sätze sind aber als *specielle Fälle* in einem *weit allgemeineren* Theoreme enthalten, bei dessen Beweise wir uns auf die Entwickelungen der § 18 der ET. stützen werden. Dasselbe lautet:

Die Elementartheiler eines alternirenden Systems $\mathfrak{A}$ *aus ganzen oder gebrochenen Grössen eines Körpers von Zahlen oder Functionen treten stets paarweise auf.*

Beweis. Wir führen den Beweis zunächst für ein alternirendes System $\mathfrak{A}$ aus ganzen oder gebrochenen *rationalen Zahlen.* Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Elemente von $\mathfrak{A}$ (ET. Art. 106) enthalte eine beliebig gewählte Primzahl p zur Potenz α_1 als Factor. Dann giebt es mindestes ein Element in $\mathfrak{A}$, das durch p^{α_1} dividirt, p weder im Zähler noch im Nenner enthält (ein mod. p reguläres Element). Ist a_{lm} ein solches, so bringen wir durch congruente Elementartransformationen 2) a_{lm} an Stelle von a_{12}, $a_{ml} = -a_{lm}$ an Stelle von $a_{21} = -a_{12}$. Multipliciren wir jetzt die S_2 mit den mod. p ganzen Zahlen $\frac{a_{13}}{a_{12}}, \frac{a_{14}}{a_{12}}, \cdots, \frac{a_{1n}}{a_{12}}$ und subtrahiren sie dann von der $S_3, S_4, \ldots, S_n$, so erhalten wir durch diese Elementartransformationen c) mod. p (ET. S. 226) ein zum gegebenen mod. p äquivalentes System, in welchem alle Elemente der Z_1, ausser a_{12}, Null sind. Durch die zu ihnen congruenten Transformationen wird das System wieder alternirend; wir haben also ein System, in welchem alle Elemente der Z_1 und S_1, ausser a_{12} und a_{21}, Null sind. Bei allen diesen Umformungen c) blieben aber die Z_2 und S_2 unverändert. Daher sind $\frac{a_{23}}{a_{21}}, \frac{a_{24}}{a_{21}}, \cdots, \frac{a_{2n}}{a_{21}}$ mod. p ganze Zahlen; multipliciren wir also die S_1 mit diesen Zahlen, subtrahiren sie dann von der $S_3, S_4, \ldots, S_n$ und führen die congruenten Transformationen mit den Zeilen aus, so erhalten wir ein zu $\mathfrak{A}$ mod. p äquivalentes System von der

*) *Frobenius*, l. c., § 13.

**) Vergl. ET. S. 142, Anm.

Gestalt (1.). Dieses bringen wir durch zwei weitere congruente Elementartransformationen *a*) mod. *p* (ET. S. 226) auf die noch einfachere Form

$$(4.)\qquad \begin{Vmatrix} 0 & p^{a_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p^{a_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & -a_{34} & 0 & \dots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & -a_{3n} & -a_{4n} & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Das zweite innere System von (4.) behandeln wir dann genau, wie eben das ganze System $\mathfrak{A}$. Wir gelangen, dieses Verfahren fortsetzend, schliesslich zu einem Systeme $\mathfrak{A}'$, das — abgesehen von einem etwa auftretenden Theilsysteme aus lauter Nullen — in $\varkappa$ Theilsysteme

$$\begin{pmatrix} 0 & p^{a_1} \\ -p^{a_1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p^{a_2} \\ -p^{a_2} & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & p^{a_\varkappa} \\ -p^{a_\varkappa} & 0 \end{pmatrix}$$

zerlegbar ist, wenn $r = 2\varkappa$ der Rang von $\mathfrak{A}$. Dabei ist

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_\varkappa.$$

Vergl. ET. Art. 108. Behalten wir die Bezeichnung in III. bei, so ist für $\mathfrak{A}'$

$$D_1 = p^{a_1}, \quad D_2 = p^{2a_1}, \quad D_3 = p^{2a_1+a_2}, \quad D_4 = p^{2(a_1+a_2)}, \dots,$$
$$D_{r-1} = p^{2(a_1+a_2+\dots+a_{\varkappa-1})+a_\varkappa}, \quad D_r = p^{2(a_1+a_2+\dots+a_\varkappa)}.$$

Daraus folgt zunächst, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ mod. *p* äquivalent sind, *p* aber eine beliebige Primzahl ist, ***dass der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ-ten Grades von $\mathfrak{A}$ bei geradem ϱ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.***

Ferner ist für $\mathfrak{A}'$

$$(5.)\qquad E_1 = p^{a_1}, \quad E_2 = p^{a_1}, \quad E_3 = p^{a_2}, \quad E_4 = p^{a_2}, \ \dots, \ E_{r-1} = p^{a_\varkappa}, \quad E_r = p^{a_\varkappa};$$

nun ist aber E_ϱ für $\mathfrak{A}$ mod. *p* gleich E_ϱ für $\mathfrak{A}'$ (ET. S. 226), in Zeichen $E_\varrho(\mathfrak{A}') = E_\varrho(\mathfrak{A})$ mod. *p*. Da $E_{2\lambda-1}(\mathfrak{A}') = E_{2\lambda}(\mathfrak{A}')$ nach (5.), so ist folglich

$$E_{2\lambda-1}(\mathfrak{A}) = E_{2\lambda}(\mathfrak{A}) \text{ mod. } p;$$

p war aber eine beliebige Primzahl; daher ist

$$E_{2\lambda-1}(\mathfrak{A}) = E_{2\lambda}(\mathfrak{A}),$$

w. z. b. w. — Dieser Beweis bleibt Wort für Wort in den übrigen Fällen unseres Theorems bestehen, nur hat man dann für *p* eine lineare bezw. irreductibele Function, oder einen wirklichen oder idealen Primtheiler zu nehmen.

Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée.

(Par M. *F. Gomes Teixeira* à Porto, Portugal.)

Les formules de *Lagrange* et de *Bürmann* et celle de *Laurent* sont des cas particuliers d'une formule qui donne le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives d'une autre fonction. Cette formule, qu'on obtient en généralisant la méthode au moyen de laquelle on trouve ces formules-là, est donnée dans les premiers nos. de ce travail. Mais cette généralisation facile n'est pas le seul but que nous avons en vue; notre but principal est de présenter quelques conséquences de la formule considérée, qui nous paraissent offrir quelque intérêt.

La première application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$. Nous démontrons premièrement que, étant donnée une fonction holomorphe dans la couronne limitée par deux circonférences dont les centres ne coïncident pas, on peut déterminer a et b de manière qu'elle soit développable en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$ convergente dans la couronne considérée. Ensuite nous faisons voir qu'on peut développer, au moyen de séries de cette forme, les fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites, ou par des droites et par des arcs de circonférence, et nous arrivons à un théorème qui contient comme cas particulier un théorème donné par M. *Appell* dans les *Acta mathematica* (t. I, p. 111). Nous donnons enfin une méthode pour former des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites, qui ne peuvent pas être continuées à l'extérieur du contour de l'aire.

La deuxième application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $\sin x$. Nous avons considéré déjà ces développements dans un mémoire publié dans le tome 116 de ce journal, et nous

allons faire voir maintenant que la méthode pour déterminer les coefficients du développement y donnée est applicable aux fonctions qui admettent des pôles.

La dernière application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$. A cet égard je donne une démonstration, que je crois nouvelle, de la formule de ***Fourier*** pour les cas des fonctions de variables complexes périodiques, et encore une extension de cette formule applicable dans le cas où la fonction considérée n'est pas périodique.

I.

Sur le développement de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$.

1. Supposons: 1°. que $f(z)$ soit une fonction holomorphe dans une couronne A, limitée extérieurement par une courbe S et intérieurement par une courbe s; 2°. que $\Theta(z)$ soit une fonction holomorphe dans l'aire limitée par S, possédant à l'intérieur de ce contour un seul zéro a; 3°. que x soit l'affixe d'un point de l'intérieur de la couronne considérée; 4°. qu'on ait, pour tous les points z du contour S,

$$|\Theta(x)|<|\Theta(z)|,$$

et, pour tous les points du contour s,

$$|\Theta(x)|>|\Theta(z)|.$$

L'équation

$$\Theta(z)-\Theta(x)=0$$

a, dans ce cas, une seule racine $z=x$ à l'intérieur de S, comme on le voit au moyen de l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz+\Theta(x)\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta^2(z)}dz+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)},$$

dont le premier et le dernier membres représentent respectivement le nombre des racines de l'équation considérée et celui des racines de l'équation $\Theta(z)=0$ qui existent à l'intérieur de S; et le théorème de ***Cauchy*** donne

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}-\int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}\right].$$

Les intégrales, qui entrent dans cette formule, peuvent être développées suivant les puissances de $\Theta(x)$ au moyen des formules

$$\int_S \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n(x) \int_S \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)},$$

$$\int_s \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Theta^n(x)} \int_s f(z)\Theta^{n-1}(z)\Theta'(z)\,dz.$$

On a donc la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Theta^n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Theta^n(x)},$$

où

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi} \int_s f(z)\Theta^{n-1}(z)\Theta'(z)\,dz,$$

laquelle donne le développement de $f(x)$ suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$.

2. Si la fonction $f(z)$ a un nombre fini de points singuliers dans l'aire limitée par la courbe s et ces points sont des pôles, les intégrales qui entrent dans la formule précédente peuvent être obtenues de la manière suivante.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ces points et soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$, c des circonférences dont les centres sont les points d'affixes $b_1, b_2, \ldots, b_k$, a et dont les rayons sont assez petits pour qu'ils n'existent pas deux à l'intérieur d'une même circonférence. On a

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{2i\pi} \int_S \frac{f'(z)dz}{n\,\Theta^n(z)}$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2ni\pi} \int_{c_m} \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi} \int_c \frac{f'(z)dz}{\Theta^n(z)},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi} \int_s f(z)\Theta^{n-1}(z)\Theta'(z)\,dz = -\frac{1}{2ni\pi} \int_S f'(z)\Theta^n(z)\,dz$$

$$= -\frac{1}{2ni\pi} \sum_{m=1}^{k} \int_{c_m} f'(z)\Theta^n(z)\,dz,$$

et par conséquent, α étant le degré de multiplicité du pôle b_m,

$$A_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha!n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)\,(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a},$$

$$B_n = -\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n}\left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(f'(x)\Theta^n(x)(x-b_m)^{\alpha+1}\right)\right]_{x=b_m},$$

où $\theta(x) = \dfrac{\Theta(x)}{x-a}$.

Il peut arriver que a soit aussi un pôle de $f(x)$. Il est facile de voir qu' alors on doit calculer A_n au moyen de la formule

$$A_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n}\left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)}\right)\right]_{x=b_m} + \frac{1}{(n+\beta)! n}\left[\frac{d^{\beta+n}}{dx^{\beta+n}}\left(\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1}}{\theta^n(x)}\right)\right]_{x=a},$$

β représentant le degré de multiplicité du pôle a, et que la formule qui donne B_n doit être remplacée par la suivante:

$$B_n = -\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n}\left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(f'(x)\Theta^n(x)(x-b_m)^{\alpha+1}\right)\right]_{x=b_m} - \frac{1}{(\beta-n)! n}\left[\frac{d^{\beta-n}}{dx^{\beta-n}}\left(f'(x)\theta^n(x)(x-a)^{\beta+1-n}\right)\right]_{x=a},$$

quand $n \leqq \beta$.

Les formules antérieures ne donnent pas les valeurs de A_0, mais on peut les trouver au moyen de la formule

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2i\pi}\int_{c_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} + \frac{1}{2i\pi}\int_{c} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)},$$

qui donne

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{(\alpha-1)!}\left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-b_m)^\alpha}{\Theta(x)}\right)\right]_{x=b_m} + f(a),$$

quand a est un point ordinaire de $f(x)$, et

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{(\alpha-1)!}\left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-b_m)^\beta}{\Theta(x)}\right)\right]_{x=b_m} + \frac{1}{\beta!}\left[\frac{d^\beta}{dx^\beta}\left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-a)^\beta}{\theta(x)}\right)\right]_{x=a},$$

quand a est un pôle de $f(x)$.

3. Considérons l'équation

$$\Theta(x) = (x-a)\theta(x) = t,$$

où t représente un nombre donné tel qu'il soit, le long de S, $|\Theta(z)| > |t|$ et, le long de s, $|\Theta(z)| < |t|$. L'équation $\Theta(x) = t$ a alors une seule racine dans la couronne limitée par les courbes S et s; on voit, en effet, au moyen des égalités

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-t} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz + t\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta^2(z)}dz + \cdots\right] = 1,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-t} = -\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{1}{t}\int_s \Theta'(z)dz + \frac{1}{t^2}\int_s \Theta'(z)\Theta^2(z)dz + \cdots\right] = 0$$

que l'équation considérée a une racine à l'intérieur de S et qu'elle n'a aucune à l'intérieur de s.

Cela posé, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la couronne limitée par S et s, la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{t^n},$$

où A_n et B_n représentent des coefficients qui sont donnés par les formules trouvées antérieurement, donne le développement de la fonction $f(x)$ de la racine considérée suivant les puissances de t.

Considérons, par exemple, l'équation de *Kepler*

$$x = a + e\sin x,$$

et soit $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$.

On a alors

$$A_0 = -\frac{\cos a}{\sin a},$$

$$A_n = -\frac{1}{(n+1)!\,n}\cdot\frac{d^{n+1}(\sin^n a)}{da^{n+1}}, \qquad (n>0)$$

$$B_1 = \frac{1}{\sin a}, \quad B_2 = B_3 = \cdots = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{\cos a}{\sin a} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(n+1)!\,n}\cdot\frac{d^{n+1}(\sin^n a)}{da^{n+1}} + \frac{1}{e\sin a}.$$

II.

Sur les séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$.

4. Pour faire une première application de la doctrine antérieure, considérons les développements ordonnés suivant les puissances de $\dfrac{x-a}{x-b}$, a et b étant deux nombres donnés.

Pour étudier ces développements, il faut chercher deux courbes S et s telles que, pour tout point z de S et pour tout point x à l'intérieur de la couronne qu'elles limitent, on ait

$$\left|\frac{x-a}{x-b}\right| < \left|\frac{z-a}{z-b}\right|,$$

et, pour tout point z de s et pour les mêmes valeurs de x, on ait

$$\left|\frac{x-a}{x-b}\right| > \left|\frac{z-a}{z-b}\right|.$$

On est ainsi conduit à considérer les courbes données par l'équation

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = C,$$

C étant une constante, ou, en posant $z = X+iY$, $a = \alpha+i\beta$, $b = \alpha'+i\beta'$,

$$(1.) \qquad (X-x_1)^2+(Y-y_1)^2 = \frac{C^2[(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2]}{(1-C^2)^2},$$

où

$$(2.) \qquad x_1 = \frac{\alpha-\alpha' C^2}{1-C^2}, \quad y_1 = \frac{\beta-\beta' C^2}{1-C^2}.$$

Cette équation représente des circonférences dont les centres (x_1, y_1) sont placés sur la droite qui passe par les points dont les affixes sont a et b.

Aux valeurs que prend C^2, quand il varie depuis 0 jusqu'à 1, il correspond un ensemble de circonférences dont les rayons varient depuis 0 jusqu'à l'infini et dont les centres varient depuis le point (α, β), qui représente a et qui correspond à $C = 0$, jusqu'à l'infini, en restant toujours du même côté du point (α, β). Chaque circonférence de cet ensemble contient à l'intérieur celles qui correspondent à des valeurs inférieures à C^2, et le point dont l'affixe est a, est à l'intérieur de toutes ces circonférences.

Aux valeurs de C^2 comprises entre ∞ et 1 correspond un autre ensemble de circonférences dont les rayons sont compris entre 0 et ∞ et dont les centres sont compris entre le point dont l'affixe est b, qui correspond à $C^2 = \infty$, et l'infini, en restant tous du côté opposé, par rapport à (α, β), de ceux des circonférences du premier ensemble. Chaque circonférence de cet ensemble contient à l'intérieur celles qui correspondent à des valeurs supérieures à C^2, et le point dont l'affixe est b est à l'intérieur de toutes ces circonférences.

En cherchant les points d'intersection de la droite dont l'équation est

$$\frac{Y-\beta}{y_1-\beta} = \frac{X-\alpha}{x_1-\alpha},$$

laquelle passe par les points a et b, avec les circonférences représentées par l'équation (1.), on trouve pour les valeurs des abscisses x' et x'' de ces points

$$x' = \frac{\alpha-C\alpha'}{1-C}, \quad x'' = \frac{\alpha+C\alpha'}{1+C},$$

et on voit qu'elles tendent la première vers l'infini et la seconde vers $\frac{\alpha+\alpha'}{2}$, quand C^2 tend vers l'unité. Donc les deux ensembles de circonférences représentées par l'équation (1.) sont séparés par une droite K, perpendiculaire à la droite des centres, qui coupe cette droite dans un point équidistant de (α, β) et (α', β'), et les circonférences des deux ensembles tendent vers la droite K quand C^2 tend vers l'unité. On peut même voir que la droite K est le lieu des points où $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

5. De ce qu'on vient de démontrer dans les n^{os}. précédents, on conclut que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans une couronne limitée par deux des circonférences représentées par l'équation (1.), on a, pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de cette couronne

$$(3.) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^n,$$

A_n et B_n étant des constantes qu'on détermine par la méthode donnée dans les n°s. 1 et 2.

Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est holomorphe dans celle des moitiés, dans lesquelles la droite K divise le plan, qui contient le point a, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n.$$

C'est ce qu'il arrive dans le cas de la fonction $\log x$, dont le développement suivant les puissances de $\frac{x-a}{x+a}$, qui est bien connu, peut être obtenu de la manière suivante.

On a

$$A_n = \frac{1}{2ni\pi} \int_c \frac{(z-b)^n}{z(z-a)^n}\, dz = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^{-1}(z-b)^n\right)\right]_{z=a}.$$

Mais on trouve au moyen de la formule de *Leibnitz*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = \frac{n!\,b^n}{x^{n+1}},$$

et par conséquent

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^{n-1}(x-b)\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{x} \cdot \frac{b^{n-1}}{x^{n-1}}(x-b) + (n-1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^{-1}(x-b)^{n-1}\right).$$

Donc

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = (n-1)!\,\frac{x-b}{x}\left[\left(\frac{b}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{b}{x}\right)^{n-2}+\cdots+1\right] = \frac{(n-1)!}{x^n}(x^n-b^n).$$

On a donc

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n.$$

En posant $b=-a$ il vient la formule connue

$$\log x = \log a + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2m+1},$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de celle des deux moitiés, dans lesquelles la perpendiculaire à la droite qui passe par les points d'affixes a et $-a$, divise le plan qui contient le point a.

6. Voici une question qui se présente maintenant. Étant données deux circonférences dans le plan de représentation des x, l'une placée à l'intérieur de l'autre, et une fonction $f(x)$ holomorphe dans la couronne limitée par ces circonférences, est-il toujours possible de former une série de la forme (3.) qui la représente dans la couronne considérée?

Supposons premièrement que le centre de la circonférence extérieure coïncide avec l'origine des coordonnées, et soient R_1 et R_2 les rayons des circonférences extérieure et intérieure, x' et y' les coordonnées du centre de celle-ci.

Pour résoudre la question considérée il faut voir si les deux circonférences données sont comprises entre celles que représente l'équation (1.), et, par conséquent, s'il existe un système de valeurs réelles de C_1^2, C_2^2, α, β, α', β' telles qu'il soit

$$(4.)\quad \begin{cases} \alpha = \alpha' C_1^2,\ \beta = \beta' C_1^2, \\ \alpha-\alpha' C_2^2 = (1-C_2^2)x',\ \beta-\beta' C_2^2 = (1-C_2^2)y', \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} R_1^2 = \dfrac{C_1^2[(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2]}{(1-C_1^2)^2}, \\ R_2^2 = \dfrac{C_2^2[\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2]}{(1-C_2^2)^2}. \end{cases}$$

Or les quatre premières équations donnent

$$\alpha' = \frac{1-C_2^2}{C_1^2-C_2^2}x',\quad \beta' = \frac{1-C_2^2}{C_1^2-C_2^2}y',$$

et les deux dernières donnent ensuite

$$R_1^2 = \frac{C_1^2(1-C_2^2)^2}{(C_1^2-C_2^2)^2}(x'^2+y'^2),\quad R_2^2 = \frac{C_2^2(1-C_1^2)^2}{(C_1^2-C_2^2)^2}(x'^2+y'^2),$$

et par conséquent, en posant $R_1 - R_2 = k$, $\frac{R_1}{R_2} = m$, $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \varrho$,

$$k = \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2}\varrho, \quad m = \frac{C_1(1 - C_2^2)}{C_2(1 - C_1^2)}.$$

En éliminant C_1^2 et C_2^2 entre ces équations, on trouve premièrement

$$C_1 = \frac{\varrho - C_2 k}{k - C_2 \varrho}, \tag{6.}$$

et ensuite

$$k\varrho(C_2^4 - 1) + [m(\varrho^2 - k^2) - k^2 - \varrho^2]C_2(C_2^2 - 1) = 0,$$

ou

$$k\varrho(C_2^2 + 1) + C_2[m(\varrho^2 - k^2) - k^2 - \varrho^2] = 0.$$

Cette équation donne pour C_2 deux valeurs, qui sont réelles quand on a

$$(\varrho^2 - k^2)[\varrho^2(m-1)^2 - k^2(m+1)^2] > 0.$$

Or, comme la circonférence dont le rayon est R_2 est placée à l'intérieur de celle dont le rayon est R_1 et comme ϱ représente la distance des centres, on a

$$\varrho < R_1 - R_2, \quad \varrho < R_1 + R_2,$$

et par conséquent

$$\varrho < k, \quad \varrho(m-1) < k(m+1).$$

Les deux valeurs considérées sont donc réelles.

On peut encore remarquer que ces deux racines sont réciproques; soient donc représentées par t et $\frac{1}{t}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (6.) il vient, pour déterminer C_1, les équations

$$C_1 = \frac{\varrho - tk}{k - t\varrho} = v, \quad C_1 = \frac{t\varrho - k}{tk - \varrho} = \frac{1}{v},$$

et on voit que les deux valeurs de C_1 sont aussi réciproques l'une de l'autre.

En substituant enfin les valeurs qu'on vient de trouver pour C_1 et C_2 dans les équations (4.) on obtient les valeurs de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$. On trouve ainsi, en posant $C_1 = v$, $C_2 = t$,

$$\alpha' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2}x', \qquad \beta' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2}y',$$

$$\alpha = \frac{v^2(1 - t^2)}{v^2 - t^2}x', \quad \beta = \frac{v^2(1 - t^2)}{v^2 - t^2}y',$$

et, en posant $C_1 = \frac{1}{v}$, $C_2 = \frac{1}{t}$,

$$\alpha' = \frac{v^2(t^2 - 1)}{t^2 - v^2}x', \quad \beta' = \frac{v^2(t^2 - 1)}{t^2 - v^2}y',$$

$$\alpha = \frac{t^2 - 1}{t^2 - v^2}x', \qquad \beta = \frac{t^2 - 1}{t^2 - v^2}y'.$$

Si l'on permute dans le premier système de formules α et α', β et β', on obtient le second. Ces formules ne déterminent donc que deux points $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$, et ces points représentent les nombres a et b.

De tout ce qui précède on conclut que les circonférences données sont comprises entre les circonférences réelles représentées par les équations (1.) et (2.), et qu'il existe, par conséquent, une série de la forme (3.) qui représente, dans la couronne limitée par ces circonférences, la fonction donnée $f(x)$. Les valeurs des nombres a et b, qui entrent dans cette série, sont données par les formules qu'on vient d'obtenir, les valeurs des coefficients sont données par les formules obtenues dans les n°s. 1 et 2.

Nous avons supposé jusqu'ici que le centre de la circonférence extérieure coïncidait avec l'origine des coordonnées. Si le centre de cette circonférence est le point d'affixe λ, on peut poser $x = x' + \lambda$, développer la fonction $f(x' + \lambda)$ suivant les puissances de $\frac{x' - a}{x' - b}$ et remplacer dans le résultat x' par $x - \lambda$.

Il convient encore de remarquer que, dans le cas limite où le cercle intérieur se réduit à un point (x', y'), c'est-à-dire, dans le cas où la fonction $f(x)$ est holomorphe dans un cercle donné, le point (x', y') de son intérieur excepté, on a, en premier lieu, $\alpha = x', \beta = y', C_2 = 0$, et ensuite

$$C_1^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{R_1^2}, \quad \alpha' = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2} x', \quad \beta' = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2} y'.$$

Les constantes a et b, qui entrent dans le développement de $f(x)$, sont alors données par les formules

$$a = x' + iy', \quad b = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2}(x' + iy');$$

le point b est donc l'inverse de a par rapport au centre du cercle donné.

7. Pour faire une première application de la doctrine antérieure considérons une aire A limitée intérieurement par des arcs de circonférence s_1, $s_2, \ldots, s_k$, limitée extérieurement, dans une direction, par une droite K, qui ne coupe pas ces arcs, et infinie dans les autres directions; et supposons que les circonférences auxquelles appartiennent les arcs considérés ne coupent pas l'aire A et que $f(x)$ soit une fonction holomorphe dans cette aire. Prenons à l'intérieur de A un point d'affixe a et sur la droite perpendiculaire à K, tirée par ce point, un autre point d'affixe b tel que les distances des deux points à K soient égales. Tirons ensuite une des circonférences représentées par

l'équation $\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \text{const.}$, dont le rayon soit assez grand et le centre assez éloigné de la droite K pour contenir à l'intérieur les arcs $s_1, s_2, \ldots$.

Cela posé, nous avons, C représentant cette circonférence et x l'affixe d'un point de l'intérieur de l'aire limitée par C et par $s_1, s_2, \ldots$

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\Big[\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} - \sum_{m=1}^{k}\int_{s_m}\frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}\Big],$$

où $\Theta(z) = \frac{z-a}{z-b}$

Mais

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-b},$$

$$\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\Big(\frac{x-a}{x-b}\Big)^n,$$

$$\int_{s_m}\frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \int_{s_m}\frac{f(z)dz}{z-x} - \int_{s_m}\frac{f(z)dz}{z-b}$$

$$= -\int_{s_m}\frac{f(z)dz}{(x-c_m)\Big[1-\frac{z-c_m}{x-c_m}\Big]} - \int_{s_m}\frac{f(z)dz}{z-b},$$

où $c_1, c_2, \ldots$ représentent les affixes des centres de $s_1, s_2, \ldots$.

En remarquant maintenant qu'on a $|z-c_m| < |x-c_m|$, le long de s_m, on voit que la première des intégrales, qui entrent dans le dernier membre de cette égalité, peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{z-c_m}{x-c_m}$, et qu'on a par conséquent

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{s_m}\frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = G\Big(\frac{1}{x-c_m}\Big),$$

$G\Big(\frac{1}{x-c_m}\Big)$ représentant, suivant l'usage, une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-c_m}$.

Nous avons donc la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\Big(\frac{x-a}{x-b}\Big)^n + \sum_{m=1}^{k} G_m\Big(\frac{1}{x-c_m}\Big),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire limitée par C et par les arcs $s_1, s_2, s_3, \ldots$.

Les valeurs de A_n sont données par la formule

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^{n+1}(z)} = \frac{a-b}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)(z-b)^{n-1}dz}{(z-a)^{n+1}},$$

laquelle fait voir que ces valeurs ne changent pas quand on remplace la circonférence C par les autres circonférences représentées par l'équation $\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \text{const.}$, qui la contiennent à l'intérieur; et, comme ces circonférences tendent vers la droite K, on peut énoncer le théorème suivant:

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée intérieurement par des arcs de cercle et extérieurement par une droite peut être développée en série de la forme suivante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + \sum_{m=1}^{k} G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de cette aire.

Il est facile de voir que cette formule a encore lieu lorsque les circonférences intérieures se reduisent à leurs centres.

8. Une autre question qui mène à des séries de la forme considérée est celle du développement des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites.

Soient $K_1, K_2, K_3, \ldots$ des droites qui limitent une aire A donnée, mais ne la coupent pas, x un point de son intérieur et $f(x)$ la fonction considérée. Par le point b de l'intérieur de A tirons des droites perpendiculaires à K_1, $K_2, K_3, \ldots$ et soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des points de ces perpendiculaires tels que leurs distances à $K_1, K_2, \ldots$ soient respectivement égales aux distances de b aux mêmes droites.

On a, en vertu du théorème de ***Cauchy***,

$$f(x)-f(b) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2i\pi}\int_{K_m} \frac{f(z)\,\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)},$$

où $\Theta(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

Mais, comme on a

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-b},$$

on voit que la fonction $\frac{f(z)\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)}$ est indépendante de a, et qu'on peut par conséquent écrire, en rendant explicite la constante a qui entre dans la fonction $\Theta(x)$,

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2i\pi}\int_{K_m}\frac{f(z)\Theta'(z,a_m)dz}{\Theta(z,a_m)-\Theta(x,a_m)}.$$

En remarquant maintenant qu'on a

$$\left|\frac{x-b}{x-a_m}\right|<\left|\frac{z-b}{z-a_m}\right|$$

pour tous les points x de l'intérieur de l'aire A et pour tous les points z de la droite K_m, on conclut que l'intégrale

$$\int_{K_m}\frac{f(z)\Theta'(z,a_m)dz}{\Theta(z,a_m)-\Theta(x,a_m)}$$

peut être développée en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{x-b}{x-a_m}$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Toute fonction $f(x)$ holomorphe dans une aire limitée par des droites, qui ne la coupent pas, est développable en série de la forme

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{k}{}'\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n,$$

quand x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire.

9. On peut démontrer, au moyen de considérations analogues à celles qu'on vient d'employer pour démontrer les théorèmes antérieurs, le théorème suivant:

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée extérieurement par des droites et par des arcs de circonférence et intérieurement par des arcs de circonférence est développable en série de la forme

$$f(x)-f(b)=\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(m)}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)+\Sigma P_m(x-c'_m)+\Sigma G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$$

($c'_1, c'_2, \ldots$ représentant les centres des arcs extérieurs, $c_1, c_2, \ldots$ ceux des arcs intérieurs et x un point de l'intérieur de l'aire), ***si ni les droites ni les circonférences considérées ne coupent l'aire.***

Ce théorème contient un théorème démontré par M. *Appell* dans les Acta mathematica (t. I, p. 111).

10. Nous avons supposé jusqu'ici que b était l'affixe d'un point de l'aire A. On peut trouver, au moyen de la même méthode, une formule applicable lorsque b est l'affixe d'un point de l'extérieur de l'aire considérée. Si l'on représente par a'_m les valeurs de a_m qui sont les affixes de points

du plan placés du même côté que l'aire A, par rapport aux droites K_m, et par a_m'' les autres valeurs de a_m, on a alors

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m''}\right)^n + \sum_{m=1}^{k'''} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(m)} \left(\frac{x-a_m'}{x-b}\right)^n + \Sigma P_m(x-c_m') + \Sigma G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right).$$

11. Une conséquence qu'on tire des théorèmes qu'on vient d'énoncer, laquelle nous ferons ici remarquer, c'est que les fonctions elliptiques peuvent être développées, d'une infinité de manières différentes, en des séries simples, dont les termes sont des fonctions rationnelles de x, lesquelles sont convergentes dans un parallélogramme des périodes.

Ainsi, par exemple, dans le cas de la fonction $p(x)$, nous avons, en considérant le parallélogramme des périodes dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées, en posant $b = 0$ et en représentant par c une circonférence infiniment petite avec le centre dans l'origine,

$$p(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{m=1}^{4} \int_{K_m} \frac{p(z)\Theta'(z, a_m)\,dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)} - \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{p(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{p(z)\,dz}{z},$$

où $\Theta(z, a_m) = \dfrac{z-a_m}{z}$; mais $a_1 = -a_3$, $a_2 = -a_4$, et

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + b_0 z^2 + \cdots;$$

donc

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(1)} \left(\frac{x}{x-a_1}\right)^n + A_n^{(2)} \left(\frac{x}{x-a_2}\right)^n + A_n^{(3)} \left(\frac{x}{x+a_1}\right)^n + A_n^{(4)} \left(\frac{x}{x+a_2}\right)^n \right],$$

où

$$A_n^{(1)} = -\frac{a_1}{2i\pi} \int_{K_1} \frac{p(z)(z-a_1)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(2)} = -\frac{a_2}{2i\pi} \int_{K_2} \frac{p(z)(z-a_2)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(3)} = \frac{a_1}{2i\pi} \int_{K_3} \frac{p(z)(z+a_1)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(4)} = \frac{a_2}{2i\pi} \int_{K_4} \frac{p(z)(z+a_2)^{n-1}\,dz}{z^{n+1}}.$$

Mais, en posant $z = -z'$, il vient

$$\int_{K_1} \frac{p(z)(z-a_1)^{n-1}}{z^{n+1}}\,dz = -\int_{K_3} \frac{p(z')(z'+a_1)^{n-1}}{z'^{n+1}}\,dz',$$

$$\int_{K_2} \frac{p(z)(z-a_2)^{n-1}}{z^{n+1}}\,dz = -\int_{K_4} \frac{p(z')(z'+a_2)}{z'^{n+1}}\,dz',$$

et par conséquent $A_n^{(1)} = A_n^{(3)}$, $A_n^{(2)} = A_n^{(4)}$.

Donc

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[\frac{A_n^{(1)}}{(x-a_1)^n} + \frac{A_n^{(1)}}{(x+a_1)^n} + \frac{A_n^{(2)}}{(x-a_2)^n} + \frac{A_n^{(2)}}{(x+a_2)^n} \right].$$

On peut encore écrire cette formule de la manière suivante:

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} [A_n^{(1)} \log(x^2 - a_1^2) + A_n^{(2)} \log(x^2 - a_2^2)].$$

12. La fonction $f(x)$, considérée dans le n°. 9, peut encore être représentée, dans l'aire A, par un autre développement que nous allons trouver.

Remarquons, en premier lieu, qu'on voit, au moyen des égalités (1.) et (2.) du n°. 4, que si l'on donne un point d'affixe $b = \alpha' + i\beta'$ et une circonférence dont le centre soit le point d'affixe $c_m = x' + iy'$ et dont le rayon soit R_m, on peut trouver un nombre $a_m = \alpha + i\beta$ tel que cette circonférence appartienne à l'ensemble de circonférences représentées par l'équation

$$\left| \frac{x - a_m}{x - b} \right| = \text{const.};$$

cette valeur de a_m est donnée par l'équation

$$a_m = \frac{R_m^2(\alpha' + i\beta')}{(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2} + \frac{[(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2 - R_m^2](x' + iy')}{(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2}.$$

Cela posé, prenons, comme antérieurement, un point b à l'intérieur de l'aire considérée et faisons correspondre à chaque droite du contour et à chaque circonférence un point, qu'on détermine par le moyen indiqué dans le n°. 8, dans le cas des droites, et par le moyen qu'on vient d'indiquer, dans le cas des circonférences; soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ les affixes de ces points. On a, en représentant par $s_1, s_2, \ldots, s_k$ les arcs de circonférence ou les segments de droite, qui forment le contour de l'aire, et par ε_m une quantité égale à $+1$, lorsque s_m fait partie du contour extérieur, et égale à -1, lorsqu'il fait partie du contour intérieur,

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^{k} \varepsilon_m \int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)},$$

ou, comme dans le n°. 8,

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^{k} \varepsilon_m \int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)},$$

où $\Theta(z, a_m) = \dfrac{z - a_m}{z - b}$. Mais on a, le long de s_m,

$$\left| \frac{x - b}{x - a_m} \right| < \left| \frac{z - b}{z - a_m} \right|.$$

Donc l'intégrale

$$\int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)}$$

peut être développée suivant les puissances entières et positives de $\frac{x-b}{x-a_m}$; et nous avons par conséquent le développement

$$f(x) = f(b) + \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n,$$

convergent à l'intérieur de l'aire considérée.

Si b représente un point de l'extérieur de l'aire A, cette formule doit être remplacée par la suivante:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m''}\right)^n + \sum_{m=1}^{k''} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a_m'}{x-b}\right)^n,$$

où a_m' représente les valeurs que prend a_m lorsque a_m et x sont tous deux à l'intérieur ou tous deux à l'extérieur de la circonférence à laquelle appartient l'arc s_m, et a_m'' représente les autres valeurs de a_m.

13. Nous terminerons ce que nous avons à dire à l'égard des séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$ en faisant voir qu'on peut former, au moyen de ces séries, des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites ou par des droites et des arcs de circonférence, lesquelles ne peuvent pas être continuées à l'extérieur de cette aire.

Soit

(7.) $$A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 + \cdots$$

une série convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité, laquelle représente une fonction qui ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle (on connaît un grand nombre de séries qui sont dans ce cas); et soit K une droite qui passe par le milieu du segment de droite déterminé par deux points dont les affixes sont a et b et y soit perpendiculaire à ce segment. La série qu'on obtient en posant $X = \frac{x-a}{x-b}$, c'est-à-dire, la série

(8.) $$A_0 + A_1\left(\frac{x-a}{x-b}\right) + A_2\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 + \cdots,$$

est convergente dans celle des régions du plan de représentation des x, dans lesquelles le divise la droite K, qui contient le point d'affixe a. Elle représente donc, dans cette aire, une fonction holomorphe, et nous allons

démontrer que cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de l'aire considérée.

Soit, en effet, u l'affixe d'un point de cette aire, voisin de K. Il existe une quantité positive ϱ et une série

$$(9.) \qquad b_0+b_1(x-u)+b_2(x-u)^2+b_3(x-u)^3+\cdots,$$

convergente dans le cercle de rayon ϱ et de centre u, telle que la fonction définie par cette série et la fonction définie par la série (8.) coïncident dans la partie commune des aires de convergence des deux séries.

Mais, en posant

$$X=\frac{x-a}{x-b}, \quad A=\frac{u-a}{u-b},$$

la série antérieure se réduit à la suivante

$$(10.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\frac{a-b}{A-1}\right)^n\left(\frac{X-A}{X-1}\right)^n,$$

laquelle est donc convergente, lorsque

$$\left|\frac{X-A}{X-1}\right|<\varrho\left|\frac{A-1}{a-b}\right|=\frac{\varrho}{|u-b|},$$

c'est-à-dire, dans un cercle, qui existe dans le plan de représentation des X, lequel contient à l'intérieur le point A. Or, ce cercle doit être tout à l'intérieur du cercle de convergence de la série (7.), parce que la fonction définie par la série (10.) doit coïncider, dans le voisinage du point A, avec la fonction définie par (7.) et cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle. Le cercle de convergence de la série (9.) doit donc être aussi tout à l'intérieur de l'aire de convergence de (8.). Comme cette circonstance se donne quelque petite que soit la distance du point d'affixe u à la droite K, on conclut que *la fonction définie par la série* (8.) *ne peut pas être continuée au delà de la droite K.*

Cela posé, soient: 1°. $K_1, K_2, K_3, \ldots$ des droites qui limitent une aire A, mais ne la coupent pas; 2°. a l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire; 3°. $b_1, b_2, b_3, \ldots$ les affixes des points placés respectivement sur les perpendiculaires à $K_1, K_2, K_3, \ldots$, tirées par le point d'affixe a, dont les distances à ces droites-ci sont respectivement égales aux distances du point correspondant à a aux mêmes droites.

Les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n, \ldots$$

sont respectivement convergentes, dans la moitié du plan déterminée par K_1 et a, par K_2 et a, etc., et les fonctions qu'elles représentent ne peuvent par être continuées au delà de ces droites.

Considérons maintenant la somme des séries précédentes

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n + \cdots .$$

Cette somme représente une fonction holomorphe dans l'aire A, et nous allons démontrer que cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de cette aire.

En effet, si cette fonction peut être continuée au delà de la droite K_1, par exemple, il existe un point d'affixe u et une série de la forme

$$b'_0 + b'_1(x-u) + b'_2(x-u)^2 + \cdots,$$

convergente dans un cercle de rayon ρ et de centre d'affixe u, lequel coupe la droite, tels que les valeurs de la série coïncident avec les valeurs de S dans la partie commune des régions de convergence des deux développements. En approchant le point d'affixe u de la droite K_1, on peut tirer un autre cercle C_1 de rayon égal à ρ_1 et de centre d'affixe u_1, qui coupe encore K_1, qui soit à l'intérieur du premier et qui ne coupe pas les droites $K_2, K_3, \ldots$; et il existe encore une série de la forme

$$b''_0 + b''_1(x-u_1) + b''_2(x-u_1)^2 + \cdots,$$

convergente dans ce cercle, dont les valeurs coïncident avec les valeurs de S dans la partie commune des régions de convergence des deux développements.

Comme le cercle C_1 est à l'intérieur des aires dans lesquelles les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n, \ \ldots$$

sont convergentes, on a aussi, dans ce cercle

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n = c_0 + c_1(x-u_1) + c_2(x-u_1)^2 + \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n = c'_0 + c'_1(x-u_1) + c'_2(x-u_1)^2 + \cdots,$$

. . . . . .

On a donc aussi, dans le cercle considéré,

$$b''_0 + b''_1(x-u_1) + \cdots - \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n + \cdots\right]$$
$$= d_0 + d_1(x-u_1) + d_2(x-u_2)^2 + \cdots .$$

Or le premier membre de cette égalité coïncide avec $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n$ dans la partie du cercle C_1 qui est à l'intérieur de l'aire A. Donc la fonction définie par cette série peut être continuée au delà de K_1, ce qui est absurde. On conclut donc que la fonction définie par la série S ne peut pas être continuée à l'extérieur de l'aire A.

14. On peut aussi former par ce moyen des fonctions holomorphes dans une aire donnée A, limitée extérieurement par des droites et par des arcs de circonférence et intérieurement par des arcs de circonférence, qui ne peuvent pas être continuées à l'extérieur de A.

Soient $C_1, C_2, C_3, \ldots$ les circonférences auxquelles appartiennent les arcs qui forment le contour de A et $K_1, K_2, K_3, \ldots$ les droites données, et supposons que ces droites et ces circonférences ne coupent pas l'aire A.

A chaque circonférence et à chaque droite il correspond deux nombres a_m et c_m (c_m étant égal à l'unité dans le cas des droites) tels qu'elle peut être représentée par l'équation

$$\left|\frac{x-b}{x-a_m}\right| = c_m. \tag{11.}$$

Cela posé, on voit comme antérieurement que, si la série (7.) représente une fonction qui ne peut pas être continuée à l'exterieur d'un cercle de rayon égal à l'unité, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c_m^n}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n$$

représente une fonction holomorphe dans une aire, qui contient l'aire A, laquelle ne peut pas être continuée au delà de la droite ou de la circonférence représentée par l'équation (11.). La somme

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c_m^n}\left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n$$

représente donc la fonction qu'on voulait former.

L'aire A peut, en particulier, être limitée seulement à l'exterieur ou seulement à l'intérieur. Dans les cas où elle est limitée intérieurement, les fontions qu'on obtient au moyen de la méthode précédente ont des *lacunes* limitées par des arcs de circonférence.

III.

Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$.

15. Considérons maintenant les développements ordonnés suivant les puissances de $\sin x$. Nous avons déjà vu, dans un mémoire publié dans ce journal (tome 116, p. 14), que l'équation $|\sin x| = c$ représente des courbes fermées, lorsque $c \leqq 1$, et nous y avons trouvé le développement des fonctions holomorphes dans l'aire limitée par une de ces courbes. Si la fonction $f(x)$ est holomorphe seulement dans la couronne limitée par deux des courbes considérées, on peut trouver son développement suivant les puissances positives et négatives de $\sin x$ au moyen des formules données dans le n°. 1. Alors, si la fonction n'a, à l'intérieur du contour s, qu'un nombre limité de points singuliers, les coefficients du développement sont donnés par les formules

$$A_n = A'_n + A''_n,$$

$$A'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^n z},$$

$$A''_n = \frac{1}{2i\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} \frac{f'(z)\,dz}{\sin^n z},$$

$$B_n = -\frac{1}{2ni\pi}\int_s f'(z)\sin^n z\,dz.$$

A l'égard de A''_n et de B_n nous n'avons rien à ajouter à ce qui résulte immédiatement de la théorie générale. Mais la méthode qui résulte de cette théorie pour le calcul de A'_n peut être remplacé, comme dans le cas considéré dans le mémoire rapporté, par une autre plus simple, qui résulte des égalités

$$\frac{1}{2(2\eta+1)i\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+1} z} = \frac{f^{(2\eta+1)}(0) + s^{(1)}_{2\eta+1} f^{(2\eta-1)}(0) + \cdots + s^{(\eta)}_{2\eta+1} f'(0)}{(2\eta+1)!},$$

$$\frac{1}{2\cdot 2\eta i\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^{2\eta} z} = \frac{f^{(2\eta)}(0) + S^{(1)}_{2\eta} f^{(2\eta-2)}(0) + \cdots + S^{(\eta-1)}_{2\eta} f''(0)}{(2\eta)!},$$

lesquelles sont une conséquence de l'analyse y donnée et ont lieu, lorsque la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point d'affixe 0. Nous rappelons qu'on représente par $s^{(m)}_{2n+1}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots,\ (2\eta-1)^2$$

pris m à m, et par $S^{(m)}_{2\eta}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ \ldots,\ (2\eta-2)^2$$

pris aussi m à m.

Si le point d'affixe 0 est un pôle de $f(x)$, dont le dégré de multiplicité est égal à β, on a, en posant $F(x) = f(x)\sin^{\beta} x$,

$$A'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\cos z \sin^{\beta} z}{\sin^{n+\beta+1} z}\,dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+\beta+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{n+\beta} z};$$

et, comme la fonction $F(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point d'affixe 0, les égalités qu'on vient d'écrire sont applicables à l'intégrale qui entre dans cette formule.

16. Pour faire une première application des formules précédentes considérons la fonction $\frac{1}{x}$. On a alors

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\cos z\,dz}{z\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\sin z\cos z\,dz}{z\sin^{n+2} z}.$$

Mais, en posant $\frac{\sin z}{z} = F(z)$, il vient

$$F^{(2\eta)}(0) = (-1)^{\eta}\cdot\frac{1}{2\eta+1}, \quad F^{(2\eta+1)}(0) = 0.$$

Donc

$$A_{2\eta+1} = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{2\eta+3} z} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+2)}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+2} z}$$

$$= \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{1}{2\eta+3} - \frac{S^{(1)}_{2(\eta+1)}}{2\eta+1} + \cdots \pm \frac{S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}}{3}\right];$$

$$A_{2\eta} = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{2\eta+2} z} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+1)}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+1} z} = 0.$$

On a aussi

$$B_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\sin z}{z^2}\,dz = 1, \quad B_n = 0 \qquad (n>1).$$

Donc nous avons la formule

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{1}{2\eta+3} - \frac{S^{(1)}_{2(\eta+1)}}{2\eta+1} + \cdots \pm \frac{S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}}{3}\right]\sin^{2\eta+1} x.$$

Cette formule a lieu pour toutes les valeurs de x qui sont réprésentées par les points de l'aire limitée par celle des ovales $|\sin x| = 1$ dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées.

17. Comme seconde application considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

On a

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\cos^2 z\,dz}{z\sin^{n+1}z} = \frac{1}{4i\pi}\int_c \frac{\sin 2z\cos z\,dz}{z\sin^{n+2}z},$$

ou, en posant $F(z) = \frac{\sin 2z}{2z}$,

$$A_n = \frac{1}{2i\pi(n+1)}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{n+1}z}.$$

Mais, on a

$$F^{(2\eta)}(0) = (-1)^\eta \frac{2^{2\eta}}{2\eta+1}, \quad F^{(2\eta+1)}(0) = 0.$$

Donc

$$A_{2\eta+1} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+2)}\int_c \frac{F'(z)dz}{\sin^{2\eta+2}z}$$

$$= \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{2^{2(\eta+1)}}{2\eta+3} - S^{(1)}_{2(\eta+1)}\frac{2^{2\eta}}{2\eta+1} + \cdots \pm S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}\frac{2^2}{3}\right].$$

$$A_{2\eta} = 0.$$

On a aussi $B_1 = 1$, $B_n = 0$ $(n>1)$; et par conséquent nous avons la formule

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{2^{2(\eta+1)}}{2\eta+3} - S^{(1)}_{2(\eta+1)}\frac{2^{2\eta}}{2\eta+1} + \cdots \pm S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}\frac{2^2}{3}\right]\sin^{2\eta+1}x.$$

IV.

Sur la série de *Fourier*.

18. L'intégrale considérée dans le n°. 1 contient comme cas particulier l'intégrale $\int \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}$, au moyen de laquelle on peut obtenir la série de *Fourier*.

Supposons que la fonction $f(x)$ admette la période 2ω, représentée géometriquement par la droite DA, qui fait un angle égal à l'argument de 2ω avec l'axe des abscisses et supposons que cette fonction soit holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites parallèles DA et CB. On trouve au moyen du théorème de *Cauchy*, en représentant par S le parallélogramme $ABCD$ et par x l'affixe d'un point de l'intérieur de ce parallélogramme,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

ou, en remarquant que les parties de cette intégrale relatives aux droites AB et CD sont égales,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_{BC} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_{DA} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right].$$

Cela posé, nous allons démontrer que, le long de la droite DA, est $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| > \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|$ et que, le long de la droite CB, est $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|$. Considérons pour cela les lignes représentées par l'équation

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| = c,$$

c étant une constante positive quelconque, laquelle, en posant

$$z = x_1 + iy_1, \quad \omega = \varrho(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

peut être réduite à la forme suivante

$$e^{-\frac{\pi}{\varrho}(y_1\cos\Theta - x_1\sin\Theta)} = c,$$

ou

$$y_1 = x_1\operatorname{tang}\Theta - \frac{\varrho\log c}{\pi\cos\Theta}.$$

On voit au moyen de cette équation que les points du plan de représentation de la variable z dans lesquels $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ prend une même valeur sont placés sur une même droite parallèle à DA. Pour trouver cette valeur, quand la droite est donnée, on doit chercher la valeur que prend $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ dans le point où la droite coupe l'axe des ordonnées. En posant pour cela $x_1 = 0$ et en représentant par y_1' l'ordonnée de ce point, on voit que la valeur que $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ prend dans la droite parallèle à DA qui coupe l'axe des ordonnées dans le point y_1' est égale à $e^{-\frac{\pi y_1'\cos\Theta}{\varrho}}$; et par conséquent que (l'angle Θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$) cette quantité décroît, lorsque la droite considérée se déplace dans le sens des ordonnées positives. Nous avons donc, pour tous les points z de la droite DA et pour tous les points x de l'intérieur l'aire $ABCD$,

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| > \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

et, pour tous les points de la droite CB et pour les mêmes valeurs de x,

$$\left|e^{\frac{in z}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{in x}{\omega}}\right|.$$

On a donc, le long de DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{in z}{\omega}} - e^{\frac{in x}{\omega}}} = \frac{1}{e^{\frac{in z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{in x}{\omega}}}{e^{\frac{2in z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2in x}{\omega}}}{e^{\frac{3in z}{\omega}}} + \cdots$$

et, le long de CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{in z}{\omega}} - e^{\frac{in x}{\omega}}} = -\left[\frac{1}{e^{\frac{in x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{in z}{\omega}}}{e^{\frac{2in x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2in z}{\omega}}}{e^{\frac{3in x}{\omega}}} + \cdots\right];$$

et par conséquent

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{ni\pi x}{\omega}},$$

où

$$A_n = -\frac{1}{2\omega}\int_{DA} e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)dz,$$

$$A_{-n} = \frac{1}{2\omega}\int_{BC} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)dz = \frac{1}{2\omega}\int_{DA} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)dz.$$

On a donc, en représentant par l le segment DA (ou un segment égal pris sur une droite parallèle à DA compris entre DA et BC) la formule de *Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_l f(z)dz + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_l f(z)\cos\frac{n(x-z)\pi}{\omega}dz\right].$$

19. La formule de *Fourier* est encore susceptible, dans le cas des variables complexes, d'une extension que nous allons indiquer. Supposons, en effet, maintenant: 1°. que la fonction $f(z)$ ne soit pas périodique, mais qu'elle soit holomorphe dans le voisinage du segment de droite AB, c'est-à-dire dans l'aire limitée par un parallélogramme PP_1Q_1Q dont deux côtes PP_1 et QQ_1 sont parallèles et égaux à AB; 2°. que ce segment soit représenté par le nombre complexe 2ω et que a soit l'affixe du point A. On a, comme antérieurement, en représentant par S le contour du parallélogramme,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)e^{\frac{in z}{\omega}}dz}{e^{\frac{in z}{\omega}} - e^{\frac{in x}{\omega}}}.$$

Soient maintenant u l'affixe d'un point de AP, v l'affixe d'un point de AQ et x l'affixe d'un point de AB. On peut écrire

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\Bigg[\int_a^u \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}+\int_u^{u+2\omega}\frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}+\int_{u+2\omega}^{a+2\omega}\frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}$$

$$-\int_a^v \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\int_v^{v+2\omega}\frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\int_{v+2\omega}^{a+2\omega}\frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\Bigg],$$

et par conséquent

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\Bigg[\lim_{u=a}\int_u^{u+2\omega}\frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}-\lim_{v=a}\int_v^{v+2\omega}\frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\Bigg],$$

ou, en supposant, comme antérieurement, que l'argument de 2ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et en ayant égard à l'inégalité

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|>\left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes u et $u+2\omega$, et à l'inégalité

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|<\left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes v et $v+2\omega$,

$$f(x)=\frac{1}{2\omega}\Big[\lim_{u=a}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega}f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz+\lim_{v=a}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_v^{v+2\omega}f(z)e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}dz\Big].$$

Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega}f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz,$$

et remarquons que, comme on a

$$\int f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz=\frac{\omega i}{n\pi}f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}+\frac{\omega^2}{n^2\pi^2}f'(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}-\frac{\omega^2}{n^2\pi^2}\int f''(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz,$$

on peut l'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\omega i}{\pi}[f(u+2\omega)-f(u)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}}+\frac{\omega^2}{\pi^2}[f'(u+2\omega)-f'(u)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}}$$

$$-\frac{\omega^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega}f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz.$$

Or la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{ni\pi(a-x)}{\omega}},$$

ou, puisque les arguments de $x-a$ et de ω sont égaux,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi|a-x|}{|\omega|}},$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|} + i\sin\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|}\right]$$

est convergente, suivant un théorème connue (*Picard, Traité d'Analyse*, t. I, p. 231); et on voit par conséquent, au moyen d'un théorème donné par *Abel* pour le cas des séries de termes réels et dont M. *Picard* a fait l'extension au cas des séries de termes complexes (l. c., t. II, p. 73), qu'est

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi(x-u)}{\omega}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{ni\pi(x-a)}{\omega}}.$$

On trouve de la même manière

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{ni\pi(x-u)}{\omega}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{ni\pi(x-a)}{\omega}}.$$

Comme on a

$$\left|\int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz\right| < M|2\omega|,$$

où M représente la plus grande valeur que prend $\left|f''(z)e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}}\right|$ dans le parallélogramme PP_1Q_1Q, on voit que les valeurs des termes de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left|\int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz\right|$$

sont inférieures aux valeurs des termes correspondants de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M|2\omega|}{n^2}$, quelle que soit la valeur de u, et par conséquent que la série considérée est uniformement convergente dans le voisinage du point A; nous avons par conséquent

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_a^{a+2\omega} f''(z) e^{-\frac{ni\pi(z-x)}{\omega}} dz.$$

De tout ce qui précède on tire l'égalité

$$\lim_{u=a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_u^{u+2\omega} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_a^{a+2\omega} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz;$$

et de la même manière on trouve la suivante

$$\lim_{v=a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{v}^{v+2\omega} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz.$$

Il vient donc la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz\Big],$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\Big[\int_{a}^{a+2\omega} f(z)dz + 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a}^{a+2\omega} f(z)\cos\frac{n\pi(x-z)}{\omega} dz\Big],$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de AB.

Die Formen der Vielflache.

(Von Herrn *O. Hermes* in Steglitz.)

(Hierzu zwei Figurentafeln).

C. Die Vielecke.

§ 37. Zu jedem Vielflach gehört als polarer Körper ein (räumliches) Vieleck, dessen Ecken- und Flächenzahl bezüglich der Anzahl der Flächen und Ecken des ersteren gleich ist, während beide Körper in der Kantenzahl übereinstimmen. Durch die Theorie der reciproken Polaren lassen sich alle in den Abschnitten *A* und *B* zur Geltung gelangten Eigenschaften der Vielflache, mögen dieselben ihre formelle Darstellung, oder ihre Anzahl, oder ihren Zusammenhang betreffen, auf die Vielecke übertragen, mit den durch diese Theorie gebotenen Aenderungen.

Man hätte auch für diese Untersuchungen statt von den Vielflachen von den Vielecken den Ausgang nehmen können. Bei einem derartigen Verfahren würden beispielsweise dieselben Formeln wie früher zum Vorschein gekommen sein, nur unter einer anderen Bedeutung. Während nämlich in den Flächenformeln (§ 3) unter den Zahlen zu verstehen sind die Kantenzahlen der durch sie zu ersetzenden *Körperflächen,* so hat man jetzt diese Zahlen zu deuten als die Kantenzahlen der durch sie zu ersetzenden *Körperecken,* und so verdoppeln sich von selbst die früher erhaltenen Resultate. Aus den *Flächenformeln* werden *Eckenformeln,* und jedem Vieleck gehört dieselbe Formel als Eckenformel zu, die als Flächenformel zur Feststellung der Form des polaren Vielflachs dient und umgekehrt. Polare Körper werden durch dieselbe Formel dargestellt, die zugleich als Flächen- oder Eckenformel für den einen und bezüglich als Ecken- oder Flächenformel für den anderen zu verwerthen ist. Demnach bedarf es auch keines neuen Beweises dafür, dass mit der früheren Anzahl der Vielflache V_0 und V_1 jetzt die Anzahl der Vielecke mit drei- und mehrkantigen Flächen übereinstimmt. Es giebt demnach im ganzen (§ 23):

1 Viereck in 1 Form,
2 Fünfecke in 4 Formen,
7 Sechsecke in 17 Formen,
34 Siebenecke in 155 Formen,
257 Achtecke in 1653 Formen u. s. w.

Auch aus den *Kantenformeln der Vielflache* (§§ 29—33) gehen die Kantenformeln der polaren Vielecke unmittelbar hervor.

§ 38. Die Verdoppelung der früher gewonnenen Ergebnisse erstreckt sich auch auf die zur Erleichterung der richtigen Auffassung dienenden *Kanten-* oder *Flächenfiguren* (§ 4). Dieselben werden durch die ihnen polar entsprechenden, den Eckenformeln zu entnehmenden Figuren, die *Eckenfiguren,* ersetzt. Hierzu dient die folgende Betrachtung.

In den *Flächenformeln* sind, je durch ihre Kantenzahlen ersetzt, zusammengestellt zuerst die *Grundfläche,* dann die Reihe der *Seitenflächen,* zuletzt die *Deckflächen.* Dieselben Formeln lassen sich als *Eckenformeln* deuten, wenn sie enthalten, je durch ihre Kantenzahlen ersetzt, zuerst die *Grundecke,* dann die Reihe der *Seitenecken,* zuletzt die *Oberecken.* Diese Oberecken, den Deckflächen der Vielflache polar entsprechend, werden nur von Deckkanten gebildet und sind dadurch von den Seitenecken zu unterscheiden, zu deren Kanten auch Grundkanten, d. h. Kanten der Grundecke, und zwar mindestens je eine, gehören.

Um die zu einer Eckenformel gehörige Figur als Netz des Vielecks zu entwerfen, hat man etwa auf die Grundecke und die von ihr ausgehenden Grundkanten, die als Untergrund punktirt zu zeichnen sind, die Seitenkanten und Deckkanten, durch welche die Seitenecken und etwaigen Oberecken gebildet werden, mit scharfen Strichen aufzusetzen. Auch hier wird die Figur leichter übersichtlich, wenn an ihr die Grundkanten und die Seitenkanten, die jederzeit leicht zu ergänzen sind, fortgelassen werden. So entsteht die der schematischen Flächenfigur eines Vielflachs genau entsprechende *schematische Eckenfigur eines Vielecks,* die aus gleich viel Linien, den Deckkanten, gebildet ist wie jene, und die mit ihrer Eckenformel, wie aus den folgenden Beispielen hervorgeht, in einem sehr einfachen Zusammenhang steht.

§ 39. Für die Vielecke mit durchweg dreikantigen Flächen gilt (§ 1) die Beziehung:

$$6(e-2) = 3f = 2k.$$

1. Die Formel:

$$(5;\ 3,\ 4,\ 4,\ 3,\ 5)$$

gehört als ***Eckenformel (E-Formel)*** zu einem von acht Dreiecken eingeschlossenen Sechseck, mit einer fünfkantigen Grundecke, dessen Seitenecken der Reihe nach e_3, e_4, e_4, e_3, e_5 sind (Fig. 39 und 39_a), während derselben Formel 1 als ***Flächenformel (F-Formel)*** ein achteckiges Sechsflach mit durchweg dreikantigen Ecken entspricht, dessen Grundfläche fünfkantig und dessen Seitenflächen der Reihe nach f_3, f_4, f_4, f_3, f_5 sind (Fig. 39_b und 39_c).

Das achtflächige Sechseck (39) ***und das achteckige Sechsflach*** (39_b) ***sind reciprok polar.*** Demnach müssen auch die *F*-Formeln zum Sechseck (39) und die *E*-Formeln zum Sechsflach (39_b) übereinstimmen. Aus der Symmetrie aber der Figuren geht hervor, dass

von den acht Flächenformeln des Sechsecks (39) die beiden den Dreiecken 445 und 355 und die vier den Dreiecken 345 als Grundflächen zugehörigen	von den acht Eckenformeln des Sechsflachs (39_b) die beiden den dreikantigen Ecken 445 und 355 und die vier den Ecken 345 als Grundecken zugehörigen

mit einander übereinkommen. Vorteilhafter jedoch und den Figuren 39 und 39_b im ganzen entsprechend ist die Darstellung der ihnen bezüglich zukommenden Flächen- und Eckenformel, wenn man statt einer einzigen Grundfläche oder Grundecke deren je fünf annimmt, nämlich die fünf Dreiecke, welche die fünfkantige Grundecke des Sechsecks (39) bilden, oder die fünf dreikantigen Ecken, welche die fünfkantige Grundfläche des Sechsflachs (39_b) umschliessen. Alsdann wird die ***Flächenformel des Sechsecks*** (39), bezüglich die ***Eckenformel des Sechsflachs*** (39_b):

$$(\overline{5}_1,\ 3_{123},\ 3_{134},\ 3_{145},\ 3_{156},\ 3_{162};\ \overline{3}_2,\ 3_{235},\ \overline{4}_3,\ 3_{346},\ \overline{4}_4,\ 3_{456},\ \overline{3}_5,\ \overline{5}_6).$$

Anmerkung. Die mehrfachen Grundflächen eines Vielflachs, sowie die mehrfachen Grundecken eines Vielecks sind, wie bezüglich die mehrfachen Deckflächen und Oberecken der Reihe nach in der zugehörigen Formel aufzuführen und zwar so, dass der letzten Grundfläche oder Grundecke bezüglich die erste Seitenfläche oder Seitenecke benachbart ist.

2. Die Formel:

$$(6;\ 6,\ 3,\ 5,\ 3,\ 6,\ 4;\ 3)$$

entspricht

als ***E-Formel*** einem zwölfflächigen Achteck mit einer sechskantigen Grundecke, den sechs Seitenecken

$$e_6,\ e_3,\ e_5,\ e_3,\ e_6,\ e_4$$

und einer dreikantigen Oberecke 3 (Fig. 40 und 40_a).

als ***F-Formel*** einem zwölfeckigen Achtflach mit einer sechskantigen Grundfläche, den sechs Seitenflächen

$$f_6,\ f_3,\ f_5,\ f_3,\ f_6,\ f_4$$

und einer dreikantigen Deckfläche (Fig. 40_b und 40_c).

Die Kante (66) dient in Figur 40_a zur ***Verbindung*** von e_6 mit e_6, in Figur 40_c zur ***Trennung*** von f_6 und f_6; das Dreieck (566) in Figur 40_a ist in Figur 40_c durch die dreiseitige Ecke (566) ersetzt u. s. w.

Das Achteck (40) und das Achtflach (40_b) sind polare Körper; die zu (40) gehörige *F*-Formel und zu (40_b) gehörige *E*-Formel ist:

$$(\overline{6}_1,\ 3_{123},\ 3_{134},\ 3_{145},\ 3_{156},\ 3_{167},\ 3_{172};$$
$$\overline{6}_2,\ \overline{3}_3,\ \overline{5}_4,\ \overline{3}_5,\ \overline{6}_6,\ \overline{4}_7,\ 3_{728},\ 3_{234},\ 3_{456},\ 3_{678};\ \overline{3}_8,\ 3_{268},\ 3_{246}).$$

3. Die Formel:

$$(7;\ 4,\ 6,\ 5,\ 4,\ 6,\ 5,\ 4;\ 4\overline{3}3)$$

gehört

als ***E-Formel*** zu einem von sechzehn Dreiecken begrenzten Zehneck mit einer drei- und einer vierkantigen Oberecke, die durch drei Zwischenkanten von einander getrennt sind (Fig. 41).

als ***F-Formel*** zu einem mit sechzehn dreikantigen Ecken versehenen Zehnflach mit einer drei- und einer vierkantigen Deckfläche, die durch drei Zwischenkanten mit einander verbunden sind (Fig. 41_a).

Die ***Zwischenkanten*** also dienen in einem Vielflach zur ***Verbindung der Deckflächen,*** in einem Vieleck zur ***Trennung der Oberecken.***

§ 40. Bei den ***Vielecken, deren Flächen nicht durchweg dreikantig sind,*** findet zwischen den Ecken-, Flächen- und Kantenzahlen die Beziehung statt:

$$2e - f = \Sigma n - 3\nu + 4,$$

wo Σn die Gesammtanzahl der Kanten aller mehr als dreikantigen Flächen und ν die Anzahl dieser Flächen bedeuten (§ 14, II).

4. Ein Beispiel für ein Vieleck mit mehrkantigen Flächen liefert die *E-Formel:*

$$(5_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 5_2;\ 3_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2).$$

Durch dieselbe wird ein Achteck dargestellt (Fig. 42) mit einer fünfkantigen Grundecke, deren eine Grundfläche $\overline{5}_1$ fünfkantig ist; die fünf Seitenecken des Achtecks sind der Reihe nach 3_1, 3_1 (beide auf $\overline{5}_1$ liegend), 4_2, 3_2, 5_2 und die Oberecken 3_1 und 4_{12}, endlich die Deckfläche $\overline{4}_2$. Das Achteck hat also zwei e_5, zwei e_4, vier e_3 und ist eingeschlossen von f_5, f_4, $7f_3$, ist also zugleich ein ***Neunflach,*** in Uebereinstimmung mit der vorangehenden Gleichung, in welcher $e = 8$, $\Sigma n = 9$, $\nu = 2$ ist.

Zu bemerken ist noch für die Figur 42, dass die Grundecke 5_1, wenn die Oberecken 3_1 und 4_{12} nicht ausserhalb der zwischen den Seitenecken enthaltenen Figur fallen sollen, selbst als seitwärts von dieser Figur liegend gedacht werden muss, und zwar jenseits der beiden Seitenecken 3_1, zwischen denen in der *E*-Formel die Grundfläche $\overline{5}_1$ liegt. Dasselbe kommt bei jeder Grundecke zur Geltung, die eine mehrkantige Grundfläche enthält.

Lässt man auch hier, zur Vereinfachung der Uebersicht (§ 38), die Grundkanten und die Seitenkanten fort, so ist auch die Grundecke 5_1, als fünfter Eckpunkt der Grundfläche $\overline{5}_1$, leicht zu ergänzen. Die ***schematische E-Figur*** des Achtecks (4) ist in Figur 42_a dargestellt. Sie enthält dieselbe Anzahl von Deckkanten, wie die schematische Flächenfigur 42_b des polaren Achtflachs, dem die Formel (4.) als *F*-Formel zugehört.

5. Die Formel

$$(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{5}_2,\ 3_{23},\ 3_3,\ 3_{13};\ 4_{13},\ \overline{5}_3,\ 3_{23},\ 3_2)$$

gehört

als ***E-Formel*** zu einem siebenflächigen Achteck mit einer vierkantigen Grundecke, die eine vier- und eine fünfkantige Grundfläche enthält, mit einer vierkantigen und zwei dreikantigen Seitenecken und einer fünfkantigen Seitenfläche (Fig. 43).

als ***F-Formel*** zu einem siebeneckigen Achtflach mit einer vierkantigen Grundfläche, die eine vier- und eine fünfkantige Grundecke enthält, mit einer vierkantigen und zwei dreikantigen Seitenflächen und einer fünfkantigen Seitenecke (Fig. 43_a).

Die *F*-Formel des siebenflächigen Achtecks 43 ist zugleich die *E*-Formel des siebeneckigen Achtflachs 43_a, nämlich wenn je die vierkantige

Grund- und Seitenecke des ersteren und die vierkantige Grund- und Seitenfläche des letzteren durch $\bar{4}_1$ und $\bar{4}_2$ bezeichnet werden:

$$(5_1;\ \bar{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ 3_{12},\ \bar{4}_2).$$

Die Körper 43_b und 43_c sind polar zu einander.

§ 41. Die *Eckenfiguren der Vielecke* in übersichtlicher Zusammenstellung.

A. Vielecke mit dreikantigen Flächen, E_0: IV_0, V_0, VI_0, VII_0, VIII_0.

B. Vielecke mit einer mehrkantigen Fläche, E_1: V_1, VI_1, VII_1.

C. Vielecke mit zwei mehrkantigen Flächen, E_2: VI_2, VII_2.

D. Vielecke mit drei mehrkantigen Flächen, E_3: VI_3, VII_3.

E. und F. Siebeneck mit vier, Achtecke mit fünf und sechs mehrkantigen Flächen: VII_4, VIII_5, VIII_6 (s. die Figurentafel I).

Die *E*-Formeln dieser Vielecke sind den Abschnitten A. und B. zu entnehmen.

§ 42. *Die EF-Körper.* In den Beispielen der Paragraphen 39 und 40 sind die durch ihre Formel als *F*- oder *E*-Formel gegebenen Körper von anderer Ecken- oder Flächenzahl als ihre polaren Körper, weil in jedem einzelnen Falle die Anzahl der Flächen und der Ecken des Körpers nicht die gleiche gewesen ist. Natürlich wird sich die Untersuchung der Körperform an die einfachere Formel anschliessen, also an die *F*- oder *E*-Formel, je nachdem die Flächen- oder die Eckenzahl die geringere ist. Wenn jedoch die Flächen- und die Eckenzahl eines Körpers übereinstimmen, eignen sich seine *F*- und *E*-Formel gleichermassen für die Darstellung seiner Form.

Zu diesen *Körpern mit gleicher Ecken- und Flächenzahl,* die kurz als *EF-Körper* (*Vieleckflache*) bezeichnet werden mögen und im vierten Abschnitt D. führlicher behandelt werden, gehören vor allem die *Pyramiden,* und wie sich aus dem Verzeichniss §§ 21—23 ergiebt, das *Sechsflach* VI_2, 1, — 7 *Siebenflache:* VII_2, 7 und VII_2, 11, VII_3, 1—VII_3, 4 und VII_3, 6, — 41 *Achtflache:* VIII_2, 42, 87—89, 93, ferner VIII_3, 8, 32—38, 51—54, 61—67, endlich VIII_4, 1—7, 9—13, 16—20.

§ 43. Wie bereits in § 37 angedeutet wurde, werden durch die Formelverzeichnisse in den Abschnitten A. und B., wenn man die Formeln als *E*-Formeln gelten lässt, die Formen der Vielecke mit dreikantigen Flächen, mit Einschluss der Zehnecke (Abschnitt A), und der allgemeineren Vielecke, mit Einschluss der Achtecke (Abschnitt B) festgestellt. Diese Vielecke sind meist Körper von mehr als zehn oder acht Flächen.

In der That umfassen die Formeln in § 12 als E-Formeln die durchweg von Dreiecken begrenzten Körper mit Einschluss der ***Sechzehnflache,*** wie aus der Beziehung

$$6(e-2) = 3f = 2k$$

für diese Körper hervorgeht — aus der sich zugleich ergiebt, dass die Körper mit durchweg dreikantigen Flächen stets eine gerade Flächenzahl haben, — und ebenso gehören zu den Formeln in den §§ 19—23 als E-Formeln ausser den ***Zwölfflachen*** mit dreikantigen Flächen, vermöge des Satzes II., § 14 ($2e-f = \Sigma n - 3\nu + 4$) auch die ***Elfflache*** mit einer vierkantigen, die ***Zehnflache*** mit einer fünfkantigen, die ***Neunflache*** mit einer sechskantigen Fläche, — ferner die ***Zehnflache*** mit f_4, f_4, die ***Neunflache*** mit f_4, f_5, endlich die ***Neunflache*** mit f_4, f_4, f_4, während alle diese Vielflache ausserdem nur von Dreiecken begrenzt sind.

Unter den durchweg von Dreiecken eingeschlossenen Körpern giebt es 233 Sechzehnflache, 50 Vierzehnflache, 14 Zwölfflache, 5 Zehnflache, 2 Achtflache, 1 Sechsflach, 1 Vierflach. Weiter lassen sich diese Vielflache eintheilen, z. B. die Sechzehnflache in 27 mit einer neunkantigen Grundecke, 84 mit achtkantigen, 92 mit siebenkantigen, 29 mit sechskantigen, 1 mit (8) fünfkantigen Grundecken (§ 12). Jedes dieser Vielflache ist durch seine E-Formel dargestellt und vollständig bestimmt.

Das Entsprechende gilt für die aus dem Abschnitt B. sich ergebenden Eigenschaften der Elfflache, Zehnflache, Neunflache, die ausser von Dreiecken bezüglich von einem Vierseit, von f_5 oder $2f_4$, von f_6, oder f_5 und f_4, oder $3f_4$ begrenzt sind. Analog sind die Beziehungen der polaren Vielecke.

D. Die Körper mit gleichviel Ecken und Flächen (Vieleckflache).

§ 44. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Ecken (e) und der Flächen (f) eines (*Euler*schen) Körpers wird (§ 14) allgemein bestimmt durch die beiden Gleichungen:

I. $$2f-e = \Sigma m - 3\mu + 4,$$

II. $$2e-f = \Sigma n - 3\nu + 4,$$

wo Σm, bezüglich Σn die Gesammtanzahl der Kanten aller mehrkantigen Ecken, bezüglich Flächen, und μ, bezüglich ν die Anzahl der mehrkantigen Ecken, bezüglich Flächen, selbst bedeuten. Für die ***Körper mit gleichviel Ecken und Flächen,*** die ***EF-Körper*** (§ 42), d. h. wenn $e = f$ ist, werden diese

Gleichungen

$$e = f = \Sigma m - 3\mu + 4 = \Sigma n - 3\nu + 4,$$

woraus

$$\Sigma m - \Sigma n = 3(\mu - \nu),$$

d. h. ***bei den EF-Körpern ist der Unterschied der Gesammtanzahl der Kanten der mehrkantigen Ecken und Flächen dreimal so gross als der Unterschied der Anzahl dieser Ecken und Flächen selbst,*** und

wenn auf einem EF-Körper gleichviel mehrkantige Ecken und Flächen vorkommen, so ist die Gesammtanzahl der Kanten der mehrkantigen Ecken und Flächen gleich gross, und demnach auch die Anzahl der dreikantigen Ecken und Flächen.

Für $\mu = 0$, also auch $m = 0$, wird $f = e = 4$, ergiebt sich also das Vierflach, zugleich Viereck, die *dreiseitige Pyramide.* —

Für $\mu = 1$ wird $f(= e) = m + 1$, wenn m die Kantenzahl der mehrkantigen Ecke oder Fläche ist. Es übertrifft also die Flächenzahl, gleich der Eckenzahl, die Kantenzahl der mehrkantigen Ecke um Eins, geltend für die ***Pyramiden*** im allgemeinen. —

Für $\mu = 2$ wird $f(= e) = \Sigma m - 2$.

Bei *zwei vierkantigen Ecken* wird $\Sigma m = 8$, also $f = e = 6$. Diesem Fall entspricht als einziges Beispiel die Formel:

$$VI_2, 1. \quad (4_1; 4_1, 3_1, 4_2, 3_2, 3_{12}; \overline{4}_2, 3_{12}),$$

als *F*-Formel dem *Sechsflach* VI_2, 1 (Fig. 36_e Abschn. B), als *E*-Formel dem *Sechseck* (Fig. VI_2, 1) zugehörig. Die *E*-Formel des ersteren ist zugleich die *F*-Formel des letzteren, nämlich:

$$(\overline{4}_1, 4_1, 3_1, 3_{12}, 3_{12}; \overline{4}_2, 3_2, 4_2),$$

oder (als *F*-Formel) auf 4_1 als Grundfläche bezogen:

$$(4_1; \overline{4}_1, 3_1, 4_2, 3_2, 3_{12}; \overline{4}_2, 3_{12}),$$

d. h. dieselbe Formel wie VI_2, 1. Das Sechsflach VI_2, 1 hat also dieselbe Flächen- und Eckenformel wie das ihm reciprok-polare Sechseck, es ist diesem isomorph*) oder als autopolar**) zu bezeichnen.

Bei *einer vier- und einer fünfkantigen Ecke,* d. h. wenn $\Sigma m = 9$ wird, ergiebt sich $f = e = 7$.

*) ***Eberhard,*** Morphologie der Polyeder, § 1.

) ***Kirkman,* on autopolar polyedra. Philos. Transactions, 1857.

Hierzu gehören zwei Siebenflache (§ 42), nämlich das ***Siebenflach***

$$VII_2, 7.\ (5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{5}_2,\ 3_{12})\quad VII_1{}^*),$$

welches ***autopolar*** ist (§ 56) und das ***Siebenflach***

$$VII_2, 11.\ (4_1;\ 3_1,\ \overline{5}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 4_2;\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{12}).$$

Zu VII_2, 11 als *F*-Formel gehört das ***Siebenflach*** Fig. 44, zu VII_2, 11 als *E*-Formel das ***Siebeneck*** Fig. 44_a. Die *F*-Formel zu diesem Siebeneck, die zugleich als *E*-Formel zum Siebenflach 44 gedeutet werden kann, wird, wenn man die drei vierkantigen Ecken des ersteren (44_a) und die drei vierkantigen Flächen des letzteren (44) mit 4_1, 4_2, 4_3 bezeichnet (Fig. 44_b und 44_c):

$$(5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 4_{23},\ 3_3,\ 3_{13};\ \overline{4}_3,\ 3_{123},\ \overline{4}_2).$$

Hier also entsprechen einer und derselben Formel VII_2, 11 zwei verschiedene reciprok polare *EF*-Körper, der eine zu VII_2, 11 als *F*-Formel, der andere zu VII_2, 11 als *E*-Formel gehörig. Derartige nicht autopolare *EF*-Körper sind als ***parapolar*** zu bezeichnen.

Allgemein sind die Körper mit der gleichen Anzahl von Ecken und Flächen, die *EF*-Körper, entweder sich selbst polar, d. i. ***autopolar,*** oder nicht. Der erste Fall tritt ein, wenn ihre Ecken- und Flächenformel dieselbe ist. Im zweiten Falle sind die *EF*-Körper ***parapolar***. Die parapolaren Körper entsprechen einander paarweise als reciprok polar, so dass die Flächenformel des einen zugleich die Eckenformel des anderen, ihm ***zugehörigen*** wird und umgekehrt. ***Die Anzahl der parapolaren Körper ist für jede Flächenzahl*** (***Eckenzahl***) ***gerade.***

Die demnächst folgende kurze Uebersicht der *EF*-Körper beschränkt sich auf die Achtflache, von denen schon ***Kirkman*** die autopolaren Fälle aufgeführt hat. An diese wird sich weiterhin die Construction dieser *EF*-Körper anschliessen.

§ 45. Die ***achteckigen Achtflache oder achtflächigen Achtecke, Achteckflache, mit zwei mehrkantigen Ecken,*** die also noch dem Fall $\mu = 2$ (§ 44) zugehören, sind

1. bei einer vier- und einer sechskantigen Ecke (e_4, e_6) das ***autopolare Achtflach*** VIII_2, 42:

$$VIII_2, 42.\ (6_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 3_1;\ 3_{12},\ \overline{6}_2),\quad VIII_{13}{}^*)$$

und das ***parapolare Achtflach***

$$VIII_2, 89.\ (5_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{6}_2,\ 3_2)$$

---

*) Nach der ***Kirkmanschen*** Bezeichnung der autopolaren Körper und so weiterhin; die Figuren am Schluss der zweiten Tafel.

(Fig. 45), zu dem als polar das Achteck 45_a gehört, während die gemeinschaftliche Flächenformel von 45_a und Eckenformel von 45 dargestellt ist in

VIII_3, 8. $(6_1; \overline{4}_1, 3_{13}, 3_3, 3_3, 4_{23}, 3_2, 3_{12}; \overline{4}_2, 3_{123}, \overline{5}_3)$

(Fig. 45_b und 45_c),

2. bei zwei fünfkantigen Ecken, bezüglich Flächen ($2e_5$, bezw. $2f_5$) das ***autopolare Achtflach***

VIII_2, 87. $(5_1; 3_1, \overline{5}_1, 3_{12}, 3_2, 3_2, 5_2; 3_1, 3_{12}, \overline{5}_2)$, VIII_{10}

und das ***parapolare Achtflach***

VIII_2, 88. $(5_1; 3_1, \overline{5}_1, 3_1, 4_2, 3_2, 4_2; 3_{12}, \overline{5}_2, 3_{12})$

(Fig. 46), zu dem als polar das Achteck 46_a gehört. Die gemeinschaftliche Flächenformel zu 46_a und Eckenformel zu 46 ist:

VIII_3, 37. $(5_{12}; \overline{4}_1, 3_1, 3_2, \overline{4}_2, 3_2, 5_3, 3_1; 3_{13}, \overline{5}_3, 3_{23})$

(Fig. 46_b und 46_c), — und dann die ***zusammengehörigen parapolaren*** Achtflache:

VIII_2, 93. $(4_1; 4_1, \overline{5}_1, 3_{12}, 3_2, 4_2; 4_2, \overline{5}_2, 3_{12}, 3_1)$,

VIII_4, 4. $(5_{12}; \overline{4}_1, 3_{123}, \overline{4}_2, 3_2, 5_{34}, 3_4, 3_{14}; \overline{4}_4, 3_{134}, \overline{4}_3, 3_{23})$,

(Fig. 47, 47_a, 47_b, 47_c). —

§ 46. ***Drei mehrkantige Ecken.*** Für $\mu = 3$ wird $f = e = \Sigma m - 5$, also bei ***drei vierkantigen Ecken,*** d. h. $\Sigma m = 12$, wird

$$f = e = 7.$$

Nun giebt es im ganzen ***fünf Siebeneckflache,*** von denen das einzige parapolare bereits in VII_3, 1 dargestellt ist (§ 44). Die übrigen vier ***autopolaren Siebenflache*** sind:

VII_3, 2. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{4}_2, 4_{23}, 3_3, 3_{13}; \overline{4}_3, 4_{13}, 3_2)$. VII_3.

VII_3, 3. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{4}_2, 3_{23}, 4_3, 3_1; 4_{13}, \overline{4}_3, 3_{23})$. VII_2.

VII_3, 4. $(4_{12}; \overline{4}_1, 3_{12}, \overline{4}_2, 4_{23}, 3, 4_{13}; 3_{13}, \overline{4}_3, 3_{23})$. VII_1.

VII_3, 6. $(4_1; \overline{4}_1, 3_{12}, 4_2, 4_3, 3_{13}; 3_{123}, \overline{4}_2, \overline{4}_3, 3_{23}.)$ VII_5.

Bei ***zwei vierkantigen und einer fünfkantigen Ecke,*** d. h. $\Sigma m = 13$, wird $f = e = 8$. — Hierzu gehören im ganzen ***neunzehn Achteckflache,*** von denen ***acht autopolar, elf parapolar*** sind. Zwei derselben, VIII_3, 8 und VIII_3, 37 sind bereits in § 45 besprochen worden.

Autopolar sind die Achtflache VIII_3, 32 (VIII_2); VIII_3, 33 (VIII_3); VIII_3, 35 (VIII_1); VIII_3, 36 (VIII_6); VIII_3, 38 (VIII_9); VIII_3, 51 (VIII_{14}); VIII_3, 52 (VIII_8); VIII_3, 54 (VIII_7).*)

Parapolar sind, ausser VIII_3, 8 und VIII_3, 37, bei paarweiser Zu-

*) Die Figuren siehe zweite Tafel, unten.

sammenstellung der zusammengehörigen polaren Körper, die Achtflache: VIII_3, 34 und VIII_3, 53; VIII_3, 61 und VIII_4, 5; VIII_3, 62 und VIII_4, 2; VIII_3, 63 und VIII_4, 1; VIII_3, 64 und VIII_4, 7; VIII_3, 65 und VIII_4, 3; VIII_3, 66 und VIII_4, 6; VIII_3, 67 und VIII_4, 9.

§ 47. ***Vier mehrkantige Ecken.*** Für $\mu = 4$ wird $f = e = \Sigma m - 8$, demnach bei ***vier vierkantigen Ecken,*** d. h. $\Sigma m = 16$, wird

$$f = e = 8.$$

Im ganzen giebt es ***siebzehn Achteckflache,*** von denen ***fünf autopolar*** sind; von den übrigen zwölf ***parapolaren Achtflachen*** sind acht bereits in den beiden letzten Paragraphen angeführt worden, nämlich VIII_4, 4 (§ 45) und in § 46 VIII_4, 5; VIII_4, 2; VIII_4, 1; VIII_4, 7; VIII_4, 3; VIII_4, 6 und VIII_4, 9, so dass noch vier übrig bleiben, nämlich die zusammengehörigen VIII_4, 10 und VIII_4, 17; VIII_4, 16 und VIII_4, 18. —

Die ***autopolaren Achtflache*** sind: VIII_4, 11 (VIII_{15}); VIII_4, 12 (VIII_{12}); VIII_4, 13 (VIII_4); VIII_4, 19 (VIII_5); VIII_4, 20 (VIII_{11}).*)

Es sind also unter den *EF*-Körpern, abgesehen von den Pyramiden:

1 autopolares Sechsflach,
5 autopolare Siebenflache,
15 autopolare Achtflache;

ferner:

2 parapolare Siebenflache,
26 parapolare Achtflache.

Anmerkung. Unter den parapolaren Achtflachen befinden sich drei Paare, nämlich VIII_3, 34 und VIII_3, 53; VIII_4, 10 und VIII_4, 17; VIII_4, 16 und VIII_4, 18, die zu einander polar und von gleichviel fünfkantigen, vierkantigen und dreikantigen Flächen und Ecken begrenzt, trotzdem aber nicht autopolar sind, weil die Flächen und Ecken auf den Körpern verschieden vertheilt sind. Die Bedingung also, dass auf einem autopolaren Körper gleichvielkantige Ecken und Flächen in gleicher Anzahl vorkommen, ist wohl als nothwendig, aber nicht als ausreichend zu bezeichnen.

§ 48. Durch seine Untersuchung über autopolare Körper (§ 44) hat ***Kirkman*** zuerst einen erfolgreichen Vorstoss in das Gebiet der Vielflache mit beliebig vielkantigen Ecken gemacht. Er fügt bald anfänglich seiner

*) Die Figuren siehe zweite Tafel, unten.

eigenen Erklärung der autopolaren Vielflache eine zweite Erklärung von *Cayley* hinzu, die sich auf die dreifache Darstellung eines Körpers als Vielflach, Vieleck und Vielkant gründet, und weiss dann die autopolaren Körper aus deren einfachsten Repräsentanten, den Pyramiden, durch Einführung und gleichzeitige Beseitigung polar zu einander gehöriger Kanten zu gewinnen, während hier die autopolaren, und allgemeiner die *EF*-Körper überhaupt, aus einem fertiggestellten Verzeichniss der sämmtlichen Vielflache, mit Einschluss der Achtflache entnommen worden sind. Es handelt sich nunmehr noch um ein *allgemeines Verfahren zur Herstellung autopolarer Körper,* das ohne weiteres auch zu autopolaren Körpern mit mehr als acht Flächen oder Ecken führt.

Ein derartiges Verfahren gründet sich auf die Eigenschaft polarer Körper, dass die Flächenformel des einen mit der Eckenformel des anderen übereinstimmt, sobald den in ihnen vorkommenden Zahlen die Bedeutung der Kantenzahlen der Flächen oder der Ecken des entsprechenden Körpers zuertheilt wird.

Wenn sich nämlich zwei polare Körper K_1 und K_2 zu einem neuen Körper K in der Weise vereinigen lassen, dass K die einander polar entsprechenden Flächen und Ecken enthält, und zwar ohne dass ihre gegenseitige Anordnung geändert wird, wenn also aus der *F*- oder *E*-Formel von K_1 und K_2 sich eine Formel von K, gleichgültig, ob *E*- oder *F*-formel, bilden lässt, in welcher sich die Formeln von K_1 und K_2 ohne wesentliche Aenderung vorfinden, so wird sich K als autopolarer Körper ergeben. Diese Zusammensetzung von K_1 und K_2 zu K und gleichzeitige Vereinigung ihrer *E*- und *F*-Formel zu einer *EF*-formel ist in der That ausführbar.

Man kann sich vorstellen, dass die polaren Körper K_1 und K_2 über einer Fläche des einen g_1 als Grundfläche und mit der polar entsprechenden Ecke des anderen e_2 als Grundecke zusammengefügt werden, so dass g_1 und e_2 und mit ihnen die der Zahl nach übereinstimmenden Grundkanten von g_1 und e_2 verloren gehen, während die übrigen Bestimmungsstücke der beiden Körper, Flächen, Ecken und Kanten, sowohl der Zahl, als der Art, als der gegenseitigen Lage nach ungeändert bleiben.

§ 49. Zunächst sei angenommen, dass *die Grundecken von* K_1 und demnach auch *die Grundflächen von* K_2 *sämmtlich dreikantig* sind. Wird jetzt die Grundecke e_2 von K_2 durch einen ebenen Schnitt beseitigt und zwar so, dass die Schnittfigur der Grundfläche g_1 von K_1 congruent wird, — man

kann zur Vereinfachung dieses Verfahrens g_1 und e_2 als regelmässig annehmen, — so lassen sich K_1 und K_2 so auf einander legen, dass g_1 und die Schnittfläche von e_2 zur Deckung kommen, und ferner die Seitenflächen von K_1 und die Grundflächen von K_2 durch Drehung um die gemeinschaftlichen Kanten zu Seitenflächen des neuen Körpers K sich vereinigen.

Nach dieser Vereinigung stimmen die Kantenzahlen der entstehenden Seitenflächen von K mit denen von K_1 überein, weil die dreieckigen Grundflächen von K_2 durch das Abschneiden der Grundecke e_2 sämmtlich vierkantig werden, also bei der Vereinigung mit einer beliebig vielkantigen Seitenfläche von K_1 die Kantenzahl der letzteren keine Aenderung erfährt. Im ganzen also gehen bei einer solchen Zusammensetzung von K_1 mit seinem polaren Körper K_2 nur die Grundfläche g_1 und die gleichvielkantige Grundecke e_2 verloren, dagegen bleiben die Seitenflächen und die Deckflächen von K_1, sowie die ihnen polaren Seitenecken und Oberecken von K_2, ihrer Anzahl, Art und Lage nach unverändert, so dass der entstehende Körper K *autopolar* wird.

Als Beispiel für diese Zusammensetzung polarer Körper möge etwa die des Sechsflachs K_1 (VI_0, 1 Fig. 48_a) mit dem Sechseck K_2 (VI_0, 1 Fig. 48_b) dienen, die beide durch dieselbe Formel:

$$48_a.\quad (5;\ 3,\ 4,\ 4,\ 3,\ 5),$$

K_1 als Flächenformel, K_2 als Eckenformel dargestellt werden. Um nun zur Vereinigung beider Körper die Flächen- und die Eckenformel leichter unterscheiden zu können, ***sollen für die letztere die Kantenzahlen der Ecken überstrichen werden,*** so dass die zu 48_a gehörige Eckenformel wird:

$$48_b.\quad (\overline{5};\ 3,\ 4,\ 4,\ 3,\ \overline{5}).$$

Wird jetzt von K_2 (48_b) die Grundecke $\overline{5}$ abgeschnitten, so dass die Schnittfigur sich der Grundfläche 5 von K_1 anpassen lässt, und werden K_1 und K_2, wie eben angegeben, vereinigt, so ergiebt sich, unter alleiniger Einbusse der Grundecke $\overline{5}$ und der Grundfläche 5, ein Körper K, der sich symbolisch würde darstellen lassen durch eine ***gemischte*** (***EF***-) ***Formel,*** wie

$$(3,\ 4,\ 4,\ 3,\ 5;\ \overline{3,\ 4,\ 4,\ 3,\ 5}),$$

aus der allerdings die autopolare Eigenschaft von K sofort hervorgehen würde, weil die Gruppe der Flächen mit der der Ecken übereinstimmt.

§ 50. ***Die gemischten*** (***EF***-) ***Formeln.*** Eine solche, das Eigenthümliche einer *F*- und *E*-Formel vereinigende *EF*-Formel verliert ihre Unbestimmtheit

und kann zur Feststellung der Form des zusammengesetzten Körpers K dienen, wenn über den Anschluss ihrer beiden Theile die feste Bestimmung getroffen wird, dass ***die Gruppe der Seitenecken sich an die der Seitenflächen in gleichem Cyklus und so anreihen soll, dass die erste Seitenecke der Eckengruppe den beiden äussersten Elementen der Flächengruppe, und demnach auch die letzte Seitenfläche der F-Gruppe den beiden äussersten Elementen der E-Gruppe zugehört.***

Durch diese Bestimmung, die fortan massgebend sein soll, wird die letzte Formel in § 49 bedeutungslos. Dagegen zeigt sich, dass aus $K_1(48_a)$ und $K_2(48_b)$ sich drei verschiedene Körper K zusammensetzen lassen, nämlich:

48_c. (3, 4, 4, 3, 5; $\overline{4, 3, 5, 3, 4}$), (VIII_6),

48_d. (3, 4, 4, 3, 5; $\overline{3, 5, 3, 4, 4}$), (VIII_8),

48_e. (3, 4, 4, 3, 5; $\overline{5, 3, 4, 4, 3}$), (VIII_7),

sämmtlich als ***autopolar*** zu bezeichnen, weil die Gruppen ihrer Seitenecken sich durch Permutation aus der Gruppe ihrer Seitenflächen ergeben.

§ 51. Sind der bisherigen Annahme (§ 49) entsprechend, die zur Vereinigung der polaren Körper K_1 und K_2 dienenden Flächen oder Ecken bezüglich nur von dreikantigen Ecken oder Flächen eingeschlossen, und hat K_1 f Flächen und e Ecken, demnach K_2 e Flächen und f Ecken, so erfolge ihre Zusammensetzung über einer n-kantigen Fläche von K_1 und mit einer n-kantigen Ecke von K_2. Alsdann gehen bei der Vereinigung zu K die Grundfläche von K_1 und die Grundecke von K_2, ferner n dreikantige Ecken von K_1 und n dreikantige Flächen von K_2 verloren, so dass sich im ganzen für den autopolaren Körper K

$$f+e-(n+1) = k-(n-1)$$

Flächen und Ecken ergeben. In der That entsteht in dem Beispiel des § 49 aus der Zusammensetzung des achteckigen Sechsflachs $VI_0, 1$ (K_1) mit dem polaren achtflächigen Sechseck $VI_0, 1$ (K_2) über der fünfkantigen Fläche, den Werthen $e+f = 14$ und $n = 5$ zugehörig, K als ein autopolares ***Achtflach.*** —

Zur ***Beantwortung dieser Frage nach der Flächen- und Eckenzahl des Körpers K*** kann man sich die Zusammensetzung von K_1 und K_2 auch als in anderer Weise erfolgend, vorstellen, zumal da diese sich nicht beschränkt auf Flächen, über denen, und Ecken, mit denen die Körper zusammenzusetzen sind, die nur von dreikantigen Ecken, bezüglich von dreikantigen Flächen eingeschlossen sind.

Die Fläche f_1 von K_1, über welcher, und die ihr polar entsprechende Ecke e_2 von K_2, mit der die beiden Körper zusammenzusetzen sind, haben gleichviel, nämlich n Kanten, wie vorher, die polar zu einander gehören. Denkt man sich diese beseitigt, so werden aus K_1 und K_2 offene Systeme S_1 und S_2, an denen f_1 und e_2 nicht mehr vorkommen, jedoch gleichviel (n) Ecken von f_1 und Grundkanten von e_2. Nunmehr lassen sich S_1 und S_2 so zusammengelegt denken, dass die n Kanten von S_2 zur Verbindung der n Ecken von S_1, unter Festhaltung ihrer früheren Reihenfolge auf den Körpern K_2 und K_1, dienen und die Systeme S_1 und S_2 sich zu dem Körper K zusammenschliessen (vergl. § 52).

An diesem Körper K fehlen nur die n Kanten von f_1 und die n Kanten von e_2. Wenn also, wie vorher, durch e und f die Ecken- und Flächenzahl der Körper K_1 und K_2 bezeichnet wird, so hat $e+f$ in beiden Körpern, vermöge ihrer polaren Beziehung, denselben Werth. Demnach lässt sich die Kantenzahl jedes einzelnen durch $(e+f-2)$ ausdrücken, so dass nach der Vereinigung beider Körper die ***Kantenzahl von K*** wird:

$$2(e+f-2)-2n = 2(e+f-n-2).$$

Weil nun der Körper K autopolar ist, also gleichviel Ecken und Flächen hat, so ergiebt sich, wenn durch f_0 und e_0 seine Flächen- und Eckenzahl bezeichnet wird:

$$f_0+e_0-2 = 2(e+f-n-2),$$

also wegen der übereinstimmenden Werthe von e_0 und f_0:

$$e_0 = f_0 = e+f-(n+1),$$

wie für den einfacheren Fall bereits gefunden worden ist. —

§ 52. ***Zweiter Fall. Zusammensetzung zweier polaren Körper K_1 und K_2 über einer Fläche, der Grundfläche von K_1, die nicht nur von dreikantigen Ecken umgeben ist*** (vergl. § 29).

Um hier das Ergebniss der Zusammensetzung, den Körper K, durch eine gemischte Formel festzustellen, ist genauer auf die Lage der mehrkantigen Ecken auf der Grundfläche von K_1 und der mehrkantigen Flächen an der Grundecke von K_2 einzugehen. Als Beispiel liege das sechseckige Sechsflach VI_1, 2_a zu Grunde. Dasselbe wird als Sechsflach K_1 durch die *F*-Formel:

$$49_a.\quad (4_1;\ 4_1,\ 3,\ 5,\ 3_1,\ \overline{4_1};\ 3_1),$$

als Sechseck K_2 durch die *E*-Formel:

$$49_b.\quad \overline{(4_1;\ 4_1,\ 3,\ 5,\ 3_1,\ \overline{4_1};\ 3_1)}$$

(Fig. 49_a und 49_b) dargestellt. Bei Vervollständigung der Körpernetze, jedoch ohne Grundkanten, entstehen die Figuren der offenen Systeme 49_c und 49_d. In dem letzteren sind $\overline{4_1}$, $\overline{3}$, $\overline{5}$, $\overline{3_1}$ offene Ecken, denen je eine Kante fehlt, während die vollständige Ecke $\overline{3_1}$ Oberecke ist und zu ihr als Deckfläche das Vierseit (Grundvierseit) $\overline{\overline{4}}$ gehört — eine doppelt überstrichene Flächenzahl hat wieder die Bedeutung einer Flächenzahl, — dem in der Figur eine Ecke, die beseitigte Grundecke 4_1, fehlt.

Werden jetzt die beiden offenen Systeme 49_c und 49_d auf einander gelegt, so dass die freien Kantenendpunkte von 49_c auf die offenen Ecken von 49_d fallen, so werden

die sämmtlichen offenen Ecken in 49_d geschlossen, und zwar zu Ecken mit der früheren Kantenzahl, nur diejenige Ecke, die mit der (anfänglich vierkantigen) Ecke $\overline{4_1}$ von 49_c zusammentrifft, erhält eine Kante mehr, was bei jeder Ecke $\overline{4_1}$, $\overline{3}$, $\overline{5}$, $\overline{3_1}$ eintreten kann und durch Hinzufügung von 1 zu der betreffenden Kantenzahl angedeutet werden soll.

die sämmtlichen offenen Flächen in 49_c geschlossen, und zwar zu Flächen mit der früheren Kantenzahl, nur diejenige Fläche, die mit der (anfänglich vierkantigen) Fläche $\overline{\overline{4_1}}$ von 49_d zusammentrifft, erhält eine Kante mehr, was bei jeder Fläche 4_1, 3, 5, 3_1 eintreten kann und durch Hinzufügung von 1 zu der betreffenden Kantenzahl angedeutet werden soll.

Bei Anordnung der Flächen und Ecken in gleichem Cyklus, wie in 49_c und 49_d, ergeben sich bei der Zusammensetzung *autopolare Achtflache;* wird aber in einer der zugehörigen Formeln in der Gruppe der Seitenflächen oder der Seitenecken der entgegengesetzte Cyklus eingeführt, so entstehen (meist) *parapolare Achtflache.* Wird, wie fast durchweg bei den folgenden Zusammensetzungen, die anfängliche Gruppirung der Ecken in 49_b festgehalten, so werden demnach die gemischten Formeln für die Körper *K bei gleichem Cyklus der Flächen in* 49_a:

A. $(3_1; (3+1)_1, 5, 3, 4_1, \overline{4_1}; \overline{(3+1)_1, \overline{4_1}, 4_1, 3, 5; 3_1})$.

B. $(3_1; (5+1), 3, 4_1, \overline{4_1}, 3_1; \overline{3_1, \overline{4_1}, 4_1, 3, (5+1); 3_1})$.

C. $(3_1; (3+1), 4_1, \overline{4_1}, 3_1, 5; \overline{3_1, \overline{4_1}, 4_1, (3+1), 5; 3_1})$.

D. $(3_1; (4+1)_1, \overline{4_1}, 3_1, 5, 3; \overline{3_1, \overline{4_1}, (4+1)_1, 3, 5; 3_1})$.

und ***bei entgegengesetztem Cyklus der Flächen*** (Fig. 49_e)

E. $(3_1;\ (3+1)_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5;\ \overline{3_1,\ 4_1,\ (4+1)_1,\ 3,\ 5;\ 3_1})$.

F. $(3_1;\ (4+1)_1,\ 3,\ 5,\ 3_1,\ \overline{4}_1;\ \overline{(3+1)_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5;\ 3_1})$.

G. $(3_1;\ (3+1),\ 5,\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1;\ \overline{3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ (5+1);\ 3_1})$.

H. $(3_1;\ (5+1),\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3;\ \overline{3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ (3+1),\ 5;\ 3_1})$.

Von diesen acht Achtflachen ***K*** sind die vier ersten ***autopolar,*** wie sich aus den cyklischen Anordnungen ihrer Seitenflächen und Seitenecken ergiebt, von denen die einen entgegengesetzt den anderen verlaufen. Diese Achtflache stimmen übrigens der Reihe nach überein, ***A*** mit VIII_{14}, ***B*** mit VIII_{13}, ***C*** mit VIII_{7}, ***D*** mit VIII_{10}. Die vier letzten Achtflache sind ***parapolar,*** und zwar ***E*** und ***F***, sowie ***G*** und ***H*** zusammengehörig polar, weil in den gemischten Formeln für jedes dieser beiden Paare die ***F***- und die ***E***-Gruppe des einen Achtflachs gleich der ***E***- und der ***F***-Gruppe des anderen ist.

Der ***Zusammenhang der gemischten Formeln A—D*** und ***E—H*** entspricht genau der Bildungsweise der zugehörigen Achtflache. In den Gruppen der Seitenflächen schreiten diese zugleich mit der Grundecke $\overline{4}_1$ zurück, nur diejenige Seitenfläche, die eine Vermehrung ihrer Kantenzahl erfährt, behauptet dieselbe Stelle; dagegen bleiben in den Gruppen der Seitenecken diese zugleich mit der Grundfläche $\overline{\overline{4}}_1$ feststehen und schreitet nur diejenige Seitenecke, deren Kantenzahl sich vermehrt, rückwärts.

Die Grundecke $\overline{4}_1$ und die Grundfläche $\overline{\overline{4}}_1$ sind nur, um den Zusammenhang mit dem zugrundeliegenden Sechsflach K_1, bezüglich Sechseck K_2 zu wahren, beibehalten werden, so dass sich beispielsweise aus der gemischten Formel ***C*** sofort entnehmen lässt, dass das zugehörige Achtflach $K(\mathrm{VIII}_7)$ durch Zusammensetzung des Sechsflachs K_1:

$$(4_1;\ 3,\ 4_1,\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 5;\ 3_1)$$

mit dem Sechseck K_2:

$$(4_1;\ 3_1,\ \overline{4}_1,\ 4_1,\ 3,\ 5;\ 3_1)$$

entstanden ist. —

§ 53. Nunmehr seien ***die einfachsten polaren Körper K_1 und K_2 zu EF-Körpern, besonders zu autopolaren, zusammenzusetzen.*** Massgebend für die Bestimmung der Anzahl f_0 der Flächen oder e_0 der Ecken der ***EF***-Körper bleibt dabei der Satz (§ 51):

$$A.\quad e_0 = f_0 = e+f-(n+1) = k-(n-1),$$

wo n die Kantenzahl bedeutet der Fläche, über der, oder der Ecke, mit der die beiden Körper K_1 und K_2 vereinigt werden.

a. ***Die Pyramiden.*** Die Pyramiden sind autopolar. Setzt man eine Pyramide mit sich selbst zusammen und zwar über der Grundfläche und demnach mit der Spitze, so ergiebt sich für K eine Pyramide von gleicher Seitenzahl. In der That wird für eine m-seitige Pyramide d. h. für $e = f = m+1$:

$$e_0 = f_0 = 2(m+1)-(m+1) = m+1.$$

Setzt man die m-seitige Pyramide mit sich selbst über einem Seitendreieck und mit einer Grundecke zusammen, so wird $n = 3$ und demnach

$$e_0 = f_0 = 2(m+1)-4 = 2(m-1),$$

also bei einer vierseitigen Pyramide ein ***Sechsflach,*** das einzige *autopolare Sechsflach* VI_2, 1 (§ 44), bei einer fünfseitigen Pyramide das *autopolare Achtflach* VIII_2, 87 (VIII_{10}), bei einer sechsseitigen Pyramide das *autopolare Zehnflach* (Fig. 50_a, 50_b, 50_c), mit *den gemischten Formeln:*

50_a. $(3_1;\ 3_1,\ 4,\ (3+1)_1,\ \overline{4_1};\ \overline{(3+1)_1,\ 4_1,\ 3_1,\ 4;\ 3_1})$.

50_b. $(3_1,\ 3_1;\ 3_1,\ 5,\ (3+2)_1,\ \overline{5_1};\ \overline{(3+2)_1,\ 5_1,\ 3_1,\ 5;\ 3_1,\ 3_1})$.

50_c. $(3_1,\ 3_1,\ 3_1;\ 3_1,\ 6,\ (3+3)_1,\ \overline{6_1};\ \overline{(3+3)_1,\ 6_1,\ 3_1,\ 6;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1})$.

u. s. w. (vergl. § 58, 1).

b. ***Die Dachkörper.***

1. Das sechseckige Fünfflach, V_0, 1, die *abgestumpfte dreiseitige Pyramide* (Fig. 51_a), ergiebt bei der Zusammensetzung mit dem polaren sechsflächigen Fünfeck, der *dreiseitigen Doppelpyramide* (Fig. 51_b), über einem Vierseit, der Grundfläche von 51_a, und mit einer vierkantigen Ecke, der Grundecke von 51_b, das *autopolare Sechsflach* VI_1, ($e+f = 11$, $n = 4$, folglich $e_0 = f_0 = 6$), mit der gemischten Formel:

51_c. $(3,\ 4,\ 3,\ 4;\ \overline{4,\ 3,\ 4,\ 3})$; —

bei der Zusammensetzung über einem Dreieck von 51_a und mit einer dreikantigen Ecke von 51_b ($e+f = 11$, $n = 3$, folglich $e_0 = f_0 = 7$), entsteht das *autopolare Siebenflach* VII_3, 4 (VII_1), mit der gemischten Formel (§ 54, 2):

51_d. $(3;\ 4,\ 4,\ 4;\ \overline{4,\ 4,\ 4;\ 3})$.

2. ***Dachkörper mit einem Doppelgiebel,*** das siebeneckige Sechsflach und das polare siebenflächige Sechseck VI_1, 2, (Fig. 52_a und 52_b) ergeben bei der Zusammensetzung über der Grundfläche von 52_a und mit der Grundecke von 52_b, die beide fünfkantig sind ($e+f = 13$, $n = 5$, folglich $e_0 = f_0 = 7$),

autopolare Siebenflache, nämlich $VII_3, 4 \equiv VII_1, VII_3, 3 \equiv VII_2, VII_3, 2 \equiv VII_3$, (Fig. 52_c, 52_d, 52_e). Die zugehörigen gemischten Formeln sind:

52_c. $(\overline{4_1};\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 3_1;\ \overline{3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4_1}})$.

52_d. $(\overline{4_1};\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1;\ \overline{3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4_1}})$.

52_e. $(\overline{4_1};\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3;\ \overline{3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{4_1}})$.

3. ***Dachkörper mit zwei Doppelgiebeln,*** das achteckige Siebenflach, *F.* VII_2, 1, und das polare achtflächige Siebeneck, *E.* VII_2, 1 (Fig. 53_a und 53_b), dargestellt durch die Formel:

$$53.\quad (6;\ 3_1,\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12};\ \overline{4_1}-\overline{4_2}),$$

ergeben durch Zusammensetzung über der sechskantigen Grundfläche von 53_a, bezüglich der sechskantigen Grundecke von 53_b, ($e+f=15$, $n=6$, folglich $e_0=f_0=8$) die beiden ***autopolaren Achtflache:***

53_c. $(\overline{4_1}-\overline{4_2};\ 3_1,\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12};\ \overline{3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12},\ 3_1;\ \overline{4_1}-\overline{4_2}})$.

53_d. $(\overline{4_1}-\overline{4_2};\ 4_{12},\ 3_1,\ 3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2;\ \overline{3_1,\ 4_{12},\ 3_2,\ 3_2,\ 4_{12},\ 3_1;\ \overline{4_1}-\overline{4_2}})$,

bezüglich das Achtflach $VIII_4, 19 \equiv VIII_5$ und $VIII_4, 13 \equiv VIII_4$.

4. ***Dachkörper mit einem dreifachen Giebel;*** VII_1, 2 als *F*-Körper, wie 53_a, ein achteckiges Siebenflach, als *E*-Körper, wie 53_b, ein achtflächiges Siebeneck (Fig. 54_a und 54_b), gehörig zur *F*-, bezüglich zur *E*-Formel:

$$54.\quad (6;\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1;\ \overline{5_1}),$$

liefern bei der Zusammensetzung über der Grundfläche und mit der Grundecke ($e+f=15$, $n=6$, folglich $e_0=f_0=8$) die ***autopolaren Achtflache:***

54_c. $(\overline{5_1};\ 3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 4_1;\ \overline{3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 3_1;\ \overline{5_1}})$,

54_d. $(\overline{5_1};\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1,\ 3_1;\ \overline{3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 3_1;\ \overline{5_1}})$,

54_e. $(\overline{5_1};\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 3_1,\ 3_1;\ \overline{3_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 3,\ 4_1,\ 3_1;\ \overline{5_1}})$;

der Reihe nach die Achtflache $VIII_3, 53 \equiv VIII_1$; $VIII_3; 32 \equiv VIII_2$; $VIII_3, 33 \equiv VIII_3$. —

Bei weiterer Vermehrung der Giebeldreiecke oder bei einer Zusammensetzung über anderen Flächen als über den Grundflächen dieser Dachkörper ergeben sich autopolare Körper von mehr als acht Flächen.

§ 54. Um die ***sämmtlichen autopolaren Körper mit Einschluss der Achtflache*** durch Zusammensetzung polarer Körper darzustellen, sind dem Verzeichniss II (§§ 19—23) die erforderlichen Grundformen zu entnehmen. Alsdann ergeben sich, entsprechend der Gleichung A in § 53, übersichtlich:

Aus den *Fünfflachen:*

V_0, 1 ein VI-flach, aus V_0, 1_a ein VII-flach;

V_1, 1 ein V-flach (Pyramide), aus V_1, 1_a ein VI-flach.

Aus den *Sechsflachen:*

VI_0, 1 . . . Achtflache (§§ 49 und 50).

VI_1, 1 . . . Sechsflach (Pyramide).

VI_1, 1_a . . . Achtflache (Pyramide, § 53_a).

VI_1, 2 . . . Siebenflache (Dachkörper, § 53, b).

VI_1, 2_a . . . Achtflache (§ 52).

VI_1, 3 und VI_1, 3_a . . . Achtflache.

VI_2, 1 . . . Siebenflache.

VI_2, 1_a und VI_2, 1_b . . . Achtflache.

VI_3, 1 . . . Siebenflache.

Aus den *Siebenflachen:*

VII_1, 1 . . . Siebenflach (Pyramide).

VII_1, 2 und VII_2, 1 . . . Achtflache (Dachkörper, § 53, b).

VII_2, 7; VII_3, 1; VII_3, 5; VII_4, 1 . . . Achtflache.

Aus dem *Achtflach* VIII_1, 1, der siebenseitigen Pyramide, geht durch Zusammensetzung mit sich selbst wiederum VIII_1, 1 hervor. — Körper, bei denen die Flächenzahl grösser ist als die Eckenzahl, kommen nicht in Betracht, weil für die polaren Körper die Eckenzahl grösser ist als die Flächenzahl. —

Demnach bleiben zur Zusammensetzung nur noch übrig:

1. Zur *Darstellung eines Sechsflachs* als *EF*-Körper das Fünfflach V_1, 1_a. Dasselbe ist jedoch als vierseitige Pyramide auf einem Seitendreieck als Grundfläche bereits in § 53, a erledigt worden. Gleiches gilt für das Sechsflach VI_1, 1_a. (Vergl. die gemischten Formeln 50_a und 50_b.)

2. *Siebenflache als EF-Körper* ergeben sich, ausser den bereits durch die gemischten Formeln 51_d, 52_c, 52_d, 52_e (§ 53, b) dargestellten, und von denen 51_d zum Fünfflach V_0, 1_a gehört, nur

a) aus dem Sechsflach und Sechseck VI_2, 1 (Fig. 55_a und 55_b), gehörig zu

$$55.\ (4_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2,\ 3_{12};\ \overline{4}_2,\ 3_{12}).$$

Bei der Zusammensetzung ergeben sich acht Siebenflache, die nicht sämmtlich verschieden von einander und theilweise parapolar sind. Wird

für das Sechsflach die Form 55_c festgehalten (Fig. 55_c und 55_d), so ergeben sich die Siebenflache:

A. $(3_{12}, \overline{4_2};\ 3_2, 4_2,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ (3+1)_{12};\ \overline{3_1, 4_2, 3_2, (3+1)_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$,

B. $(3_{12}, \overline{4_2};\ 4_2, 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_{12}, (3+1)_2;\ \overline{3_1, 4_2, (3+1)_2, 3_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$,

C. $(\overline{4_2},\ 3_{12};\ 3_1, \overline{4_1},\ 3_{12}, 3_2,\ (4+1)_2;\ \overline{3_1, (4+1)_2, 3_2, 3_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$,

D. $(\overline{4_2},\ 3_{12};\ \overline{4_1}, 3_{12}, 3_2,\ 4_2,\ (3+1)_1;\ \overline{(3+1)_1, 4_2, 3_2, 3_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$;

wenn aber statt des Sechsflachs 55_c die symmetrische Form 55_e eintritt, so werden die Siebenflache:

E. $(\overline{4_2},\ 3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4_2,\ 3_2, (3+1)_{12};\ \overline{(3+1)_1, 4_2, 3_2, 3_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$,

F. $(\overline{4_2},\ 3_{12};\ 4_2,\ 3_2,\ 3_{12}, \overline{4_1}, (3+1)_1;\ \overline{3_1, 4_2, 3_2, (3+1)_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$,

G. $(3_{12}, \overline{4_2};\ 3_2,\ 3_{12}, \overline{4_1},\ 3_1, (4+1)_2;\ \overline{3_1, 4_2, (3+1)_2, 3_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$,

H. $(3_{12}, \overline{4_2};\ 3_{12}, \overline{4_1},\ 3_1,\ 4_2, (3+1)_2;\ \overline{3_1, (4+1)_2, 3_2, 3_{12}, 4_1};\ 3_{12}, \overline{4_2})$,

Von diesen acht Siebenflachen sind die vier ersten ***autopolar*** (A. oder $VII_3, 2 \equiv VII_3$; B. oder $VII_3, 3 \equiv VII_2$; C. oder $VII_2, 7 \equiv VII_4$; D. oder $VII_3, 6 \equiv VII_5$); von den vier letzten sind G. und H. zusammengehörig parapolar, nämlich G. identisch mit $VII_3, 1$ und H. mit $VII_2, 11$, ***E. und F. nur scheinbar parapolar, in der That aber autopolar, und zwar identisch mit*** $VII_3, 3 \equiv VII_2$ ***d. i. mit dem Siebenflach B.***

b) Endlich gehen noch ***Siebenflache aus der Zusammensetzung von*** *F.* $VI_3, 1$ ***mit*** *E.* $VI_3, 1$ hervor, die der Formel

56. $(3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{13},\ 3_{23},\ \overline{4_2},\ 3_{12};\ 3_{13}\ \overline{4_3},\ 3_{23})$

entsprechen (Fig. 56_a und 56_b). Beide Figuren sind symmetrisch; es ergeben sich also bei der Zusammensetzung nur zwei Siebenflache, deren gemischte Formeln sind:

56_e. $(3_{13}, \overline{4_3}, 3_{23};\ (3+1)_{23}, \overline{4_2}, 3_{12}, \overline{4_1}, (3+1)_{13};\ \overline{3_{12}, \overline{4_1}, (3+1)_{13}, (3+1)_{23}, 4_2};\ 3_{23}, \overline{4_3}, 3_{13})$,

56_f. $(3_{23}, \overline{4_3}, 3_{13};\ (3+1)_{13}, 3_{23}, \overline{4_2}, (3+1)_{12}, \overline{4_1};\ \overline{(3+1)_{12}, \overline{4_1}, (3+1)_{13}, 3_{23}, 4_2};\ 3_{23}, \overline{4_3}, 3_{13})$.

Beide Siebenflache sind ***autopolar*** und zwar 56_e oder $VII_3, 4 \equiv VII_1$ und 56_f oder $VII_3, 3 \equiv VII_2$.

§ 55. ***Herstellung autopolarer Achtflache aus Sechsflachen*** (vergl. die Uebersicht in § 54).

1. Zusammensetzung der polaren Körper *F.* $VI_1, 1_a$ und *E.* $VI_1, 1_a$:

57_o. $(3_1;\ 3_1,\ 5,\ 3_1,\ \overline{5_1};\ 3_1,\ 3_1)$.

Es entstehen die beiden ***autopolaren Achtflache:***

57_o, a. $(3_1,\ 3_1;\ 3_1,\ (5+2),\ 3_1,\ \overline{5_1};\ \overline{(5+2),\ 3_1,\ \overline{5_1},\ 3_1;\ 3_1,\ 3_1})$,

57_o, b. $(3_1,\ 3_1;\ (3+2)_1,\ 5,\ 3_1,\ \overline{5_1};\ \overline{5,\ (3+2)_1,\ \overline{5_1},\ 3_1;\ 3_1,\ 3_1})$;

das erste die Pyramide VIII_0, das zweite übereinstimmend mit VIII_2, $87 \equiv VIII_{10}$ (§ 58, 1).

2. Zusammensetzung der Körper *F.* VI_1, 3 und *E.* VI_1, 3, deren gemeinschaftliche *F*- und *E*-Formel ist:

$$57.\quad (4_1;\ 4,\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4;\ 4_1).$$

Die zugehörigen Figuren (Fig. 57_a und 57_b) sind symmetrisch; darum beschränkt sich die Anzahl der aus ihrer Zusammensetzung hervorgehenden verschiedenen Achtflache auf zwei, deren gemischte Formeln sind:

$$57_c.\quad (4_1;\ 3_1,\ 4,\ 4,\ (3+1)_1,\ \overline{4_1};\ \overline{(3+1)_1,\ 4,\ 4,\ 3_1,\ \overline{4_1};\ 4_1}),$$

$$57_d.\quad (4_1;\ 3_1,\ \overline{4_1},\ 3_1,\ 4,\ (4+1);\ \overline{3_1,\ (4+1),\ 4,\ 3_1,\ \overline{4_1};\ 4_1}).$$

Beide Achtflache sind autopolar: 57_c oder VIII_4, $20 \equiv VIII_{11}$; 57_d oder VIII_3, $52 \equiv VIII_8$.

3. Zusammensetzung von *F.* VI_1, 3_a und *E.* VI_1, 3_a:

$$58.\quad (4;\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ 3_1,\ \overline{4_1}).$$

Es ergeben sich die beiden autopolaren Achtflache 58_a, identisch mit VIII_4, $12 \equiv VIII_{12}$, und 58_b, identisch mit VIII_4, $11 \equiv VIII_{15}$, mit den gemischten Formeln:

$$58_a.\quad (\overline{4_1},\ 3_1;\ 3_1,\ 4_1,\ 4,\ 4_1;\ \overline{4,\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1;\ 3_1,\ \overline{4_1}}),$$

$$58_b.\quad (\overline{4_1},\ 3_1;\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1,\ 4;\ \overline{4,\ 4_1,\ 3_1,\ 4_1;\ 3_1,\ 4_1}).$$

4. Zusammensetzung von *F.* $VI_2, 1_a$ mit *E.* VI_2, 1_a, gehörig zur Formel:

$$59.\quad (3_{12};\ \overline{4_1},\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ 4_2,\ 3_1;\ 4_1,\ 3_2).$$

Es entstehen die *drei autopolaren Achtflache:*

$$59_c.\quad (3_2,\ 4_1;\ 3_1,\ (4+1)_2,\ \overline{4_2},\ (3+1)_{12},\ \overline{4_1};\ \overline{(4+1)_2,\ 4_2,\ (3+1)_{12},\ 4_1,\ 3_1;\ 4_1,\ 3_2}),$$

$$59_d.\quad (3_2,\ 4_1;\ 4_2,\ \overline{4_2},\ (3+1)_{12},\ \overline{4_1},\ (3+1)_1;\ \overline{4_2,\ 4_2,\ (3+1)_{12},\ 4_1,\ (3+1)_1;\ 4_1,\ 3_2}),$$

$$59_e.\quad (3_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{4_1},\ (3+1)_1,\ (4+1)_2,\ \overline{4_2};\ \overline{(4+1)_2,\ 4_2,\ 3_{12},\ 4_1,\ (3+1)_1;\ 4_1,\ 3_2}),$$

und zwar 59_c oder VIII_3, $52 \equiv VIII_8$; 59_d oder VIII_4, $20 \equiv VIII_{11}$; 59_e oder VIII_3, $54 \equiv VIII_7$. Wird 59_b durch die symmetrische Figur ersetzt, so ergeben sich die *drei Achtflache:*

$$59_f.\quad (3_2,\ 4_1;\ 3_1,\ (4+1)_2,\ \overline{4_2},\ (3+1)_{12},\ \overline{4_1};\ \overline{(3+1)_1,\ 4_2,\ \overline{4_2},\ (3+1)_{12},\ 4_1;\ 4_1\ 3_2}),$$

$$59_g.\quad (3_2,\ 4_1;\ 4_2,\ \overline{4_2},\ (3+1)_{12},\ \overline{4_1},\ (3+1)_1;\ \overline{3_1,\ 4_1,\ (3+1)_{12},\ 4_2,\ (4+1)_2;\ 4_1\ 3_2}),$$

$$59_h.\quad (3_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{4_1},\ (3+1)_1,\ (4+1)_2,\ \overline{4_2};\ \overline{(3+1)_1,\ 4_1,\ 3_{12},\ \overline{4_2},\ (4+1)_2;\ 4_1\ 3_2}),$$

von denen 59_f und 59_g ***zusammengehörig parapolar*** sind und zwar übereinstimmend mit VIII_4, 1 und VIII_3, 63; dagegen ist 59_h *autopolar* und übereinstimmend mit VIII_3, $36 \equiv VIII_6$.

5. Zusammensetzung von *F.* $VI_2, 1_b$ und *E.* $VI_2, 1_b$, gehörig zur Formel:

60. $(3_1, \overline{4_1}, 3_{12}, 4_2, 4_1; 3_{12}, \overline{4_2}, 3_2)$.

Es entstehen (vergl. die Fig. 60_a und 60_b) die drei *autopolaren Achtflache:*

60_c. $(3_2, \overline{4_2}, 3_{12}; 4_1, 4_2, (3+1)_{12}, \overline{4_1}; \overline{(3+1)_{12}, \overline{4_1}, 4_1, 4_2; 3_{12}, \overline{4_2}, 3_2})$,

60_d. $(3_2, \overline{4_2}, 3_{12}; 4_2, 3_{12}, \overline{4_1}, (4+1)_1; \overline{3_{12}, \overline{4_1}, (4+1)_1, 4_2; 3_{12}, \overline{4_2}, 3_2})$,

60_e. $(3_2, \overline{4_2}, 3_{12}; 3_{12}, \overline{4_1}, 4_1, (4+1)_2; \overline{3_{12}, \overline{4_1}, 4_1, (4+1)_2; 3_{12}, \overline{4_2}, 3_2})$,

und zwar stimmen überein 60_c mit VIII_4, $13 \equiv VIII_4$; 60_d mit VIII_3, $54 \equiv VIII_7$; 60_e mit VIII_3, $38 \equiv VIII_9$. — Wird aber die *E*-Figur 60_b durch die ihr symmetrische Figur ersetzt, so ergeben sich die drei Achtflache:

60_f. $(3_2, \overline{4_2}, 3_{12}; 4_1, (4+1)_2, 3_{12}, \overline{4_1}; \overline{(4+1)_2, 4_1, \overline{4_1}, 3_{12}; 3_{12}, \overline{4_2}, 3_2})$,

60_g. $(3_2, \overline{4_2}, 3_{12}; 4_2, (3+1)_{12}, \overline{4_1}, 4_1; \overline{4_2, (4+1)_1, \overline{4_1}, 3_{12}; 3_{12}, \overline{4_2}, 3_2})$,

60_h. $(3_2, \overline{4_2}, 3_{12}; 3_{12}, \overline{4_1}, (4+1)_1, 4_2; \overline{4_2, 4_1, \overline{4_1}, (3+1)_{12}; 3_{12}, \overline{4_2}, 3_2})$;

das *autopolare Achtflach* 60_f oder VIII_3, $36 \equiv VIII_6$, und die beiden zusammengehörigen parapolaren Achtflache 60_g (VIII_3, 61) und 60_h (VIII_4, 5).

§ 56. Zusammensetzung von Siebenflachen zu autopolaren Achtflachen.

1. *F.* VII_2, 7 mit *E.* VII_2, 7. (Fig. 61_a, 61_b, 61_c).

61. $(5_1; 3_{12}, 3_2, 3_2, 4_2, 3_1, \overline{4_1}; 3_{12}, \overline{5_2})$.

Bei Zugrundelegung von 61_b ergeben sich die Achtflache:

61_d. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_1, 4_2, 3_2, 3_2, 3_{12}, \overline{4_1}; \overline{\overline{4_1}, (3+1)_1, 4_2, 3_2, 3_2, 3_{12}; 3_{12}, \overline{5_2}})$,

61_e. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (4+1)_2, 3_2, 3_2, 3_{12}, \overline{4_1}, 3_1; \overline{\overline{4_1}, 3_1, (4+1)_2, 3_2, 3_2, 3_{12}; 3_{12}, \overline{5_2}})$,

61_f. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_2, 3_2, 3_{12}, \overline{4_1}, 3_1, 4_2; \overline{\overline{4_1}, 3_1, 4_2, (3+1)_2, 3_2, 3_{12}; 3_{12}, \overline{5_2}})$,

61_g. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_2, 3_{12}, \overline{4_1}, 3_1, 4_2, 3_2; \overline{\overline{4_1}, 3_1, 4_2, 3_2, (3+1)_2, 3_{12}; 3_{12}, \overline{5_2}})$,

61_h. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_{12}, \overline{4_1}, 3_1, 4_2, 3_2, 3_2; \overline{\overline{4_1}, 3_1, 4_2, 3_2, 3_2, (3+1)_{12}; 3_{12}, \overline{5_2}})$.

sämmtlich *autopolar* und übereinstimmend 61_d mit VIII_3, $52 \equiv VIII_8$; 61_e mit VIII_2, $87 \equiv VIII_{10}$; 61_f mit VIII_3, $32 \equiv VIII_2$; 61_g und 61_h mit VIII_3, $38 \equiv VIII_9$.

Bei Zugrundelegung von 61_c entstehen die Achtflache:

61_i. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_1, 4_2, 3_2, 3_2, 3_{12}, \overline{4_1}; \overline{(3+1)_{12}, 3_2, 3_2, 4_2, 3_1, \overline{4_1}; 3_{12}, 5_2})$.

61_k. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (4+1)_2, 3_2, 3_2, 3_{12}, \overline{4_1}, 3_1; \overline{3_{12}, (3+1)_2, 3_2, 4_2, 3_1, \overline{4_1}; 3_{12}, 5_2})$.

61_l. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_2, 3_2, 3_{12}, \overline{4_1}, 3_1, 4_2; \overline{3_{12}, 3_2, (3+1)_2, 4_2, 3_1, \overline{4_1}; 3_{12}, 5_2})$.

61_m. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_2, 3_{12}, \overline{4_1}, 3_1, 4_2, 3_2; \overline{3_{12}, 3_2, 3_2, (4+1)_2, 3_1, \overline{4_1}; 3_{12}, 5_2})$.

61_n. $(\overline{5_2}, 3_{12}; (3+1)_{12}, \overline{4_1}, 3_1, 4_2, 3_2, 3_2; \overline{3_{12}, 3_2, 3_2, 4_2, (3+1)_1, \overline{4_1}; 3_{12}, 5_2})$.

Von diesen sind zusammengehörig parapolar 61_i(VIII$_3$, 34) und 61_n (VIII$_3$, 53); 61_k (VIII$_3$, 37) und 61_m (VIII$_2$, 88); dagegen ist 61_l (VIII$_3$, 36 $\equiv$ VIII$_6$) ***autopolar.***

2. ***F.*** VII$_3$, 1 mit ***E.*** VII$_3$, 1:

62. $(5_1; 3_2, 3_{12}, \overline{4_1}, 3_{13}, 3_3, 4_{23}; \overline{4_3}, 3_{123}, \overline{4_2})$.

Durch Zusammensetzung ergeben sich die *autopolaren Achtflache:*

62_a. $(\overline{4_2}, 3_{123}, \overline{4_3}; (4+1)_{23}, 3_3, 3_{13}, \overline{4_1}, 3_{12}, 3_2; \overline{\overline{4_1}, 3_{12}, 3_2, (4+1)_{23}, 3_3, 3_{13}}; \overline{4_3}, 3_{123}, \overline{4_2})$,

62_b. $(\overline{4_2}, 3_{123}, \overline{4_3}; (3+1)_3, 3_{13}, \overline{4_1}, 3_{12}, 3_2, 4_{23}; \overline{\overline{4_1}, 3_{12}, 3_2, 4_{23}, (3+1)_3, 3_{13}}; \overline{4_3}, 3_{123}, \overline{4_2})$,

62_c. $(\overline{4_2}, 3_{123}, \overline{4_3}; (3+1)_{13}, \overline{4_1}, 3_{12}, 3_2, 4_{23}, 3_3; \overline{\overline{4_1}, 3_{12}, 3_2, 4_{23}, 3_3, (3+1)_{13}}; \overline{4_3}, 3_{123}, \overline{4_2})$,

welche übereinstimmen: 62_a mit VIII$_3$, 36 $\equiv$ VIII$_6$; 62_b mit VIII$_4$, 20 $\equiv$ VIII$_{11}$; 62_c mit VIII$_4$, 12 $\equiv$ VIII$_{12}$.

3. ***F.*** VII$_3$, 5 mit ***E.*** VII$_3$, 5.

63. $(4_{12}; \overline{4_1}, 3_{13}, 3_3, 3_{23}, \overline{4_2}, 3_{12}; 3_{23}, \overline{5_3}, 3_{13})$.

Es entstehen die beiden *autopolaren Achtflache:*

63_a. $(3_{13}, \overline{5_3}, 3_{23}; (3+1)_{12}, \overline{4_2}, (3+1)_{23}, 3_3, 3_{13}, \overline{4_1}; \overline{(3+1)_{23}, 3_3, 3_{13}, \overline{4_1}, (3+1)_{12}, \overline{4_2}}; 3_{23}, \overline{5_3}, 3_{13})$,

63_b. $(3_{13}, \overline{5_3}, 3_{23}; (3+1)_3, (3+1)_{13}, \overline{4_1}, 3_{12}, \overline{4_2}, 3_{23}; \overline{3_{23}, (3+1)_3, (3+1)_{13}, \overline{4_1}, 3_{12}, \overline{4_2}}; 3_{23}, \overline{5_3}, 3_{13})$,

von denen 63_a mit VIII$_3$, 51 d. i. VIII$_{14}$ und 63_b mit VIII$_3$, 35 d. i. VIII$_1$ übereinkommt.

4. ***F.*** VII$_4$, 1 mit ***E.*** VII$_4$, 1:

64. $(4_{12}; \overline{4_1}, 3_{13}, 3_{23}, \overline{4_2}, 3_{24}, 3_{14}; 3_{134}, \overline{4_3}, \overline{4_4}, 3_{234})$,

zusammengesetzt ergiebt das autopolare Achtflach VIII$_4$, 20 d. i. VIII$_{11}$ in der Darstellung:

64_a. $(3_{234}, \overline{4_4}, \overline{4_3}, 3_{134}; (3+1)_{14}, 3_{24}, \overline{4_2}, (3+1)_{23}, 3_{13}, \overline{4_1}; \overline{(3+1)_{23}, 3_{13}, \overline{4_1}, (3+1)_{14}, 3_{24}, \overline{4_2}}; 3_{134}, \overline{4_3}, \overline{4_4}, 3_{234})$.

§ 57. In den drei letzten Paragraphen sind nunmehr durch *polare Zusammensetzung* der einfachsten Körper die sämmtlichen autopolaren Körper, mit Einschluss der Achtflache, und zwar meist auf mehrfache Art, dargestellt worden. Es hat sich im ganzen das folgende Resultat ergeben:

Werden die Pyramiden, ihrer Flächenzahl entsprechend, durch V_0, VI_0. VII_0, VIII_0 bezeichnet, so lassen sich durch polare Zusammensetzung, bei Anwendung der *Kirkman*schen *Bezeichnung,* herstellen (vergl. § 54):

V_0 aus IV_1, 1. —

VI_0 aus V_1 1 und V_1, 1_a.

VI_1 aus V_0, 1 und V_1, 1_a. —

VII_0 aus VI_1, 1.

VII_1 aus V_0, 1_a; VI_1, 2; VI_3, 1.
VII_2 aus VI_1, 2; VI_2, 1; VI_3, 1.
VII_3 aus VI_1, 2 und VI_2, 1.
VII_4 aus VI_2, 1.
VII_5 aus VI_2, 1. —
VIII_0 aus VI_1, 1_a und VII_1, 1.
VIII_1 aus VII_1, 2 und VII_3, 5.
VIII_2 aus VI_1, 2; VI_2, 1_a; VII_2, 7.
VIII_3 aus VII_1, 2.
VIII_4 aus VI_2, 1_b und VII_2, 1.
VIII_5 aus VII_2, 1.
VIII_6 aus VI_0, 1; VI_2, 1_a; VI_2, 1_b; VII_2, 7; VII_3, 1.
VIII_7 aus VI_0, 1; VI_1, 2_a; VI_2, 1_a; VI_2, 1_b.
VIII_8 aus VI_0, 1; VI_1, 3; VII_2, 7.
VIII_9 aus VI_2, 1_b und VII_2, 7 (auf zwei Arten).
VIII_{10} aus VI_1, 1_a; VI_1, 2_a; VII_2, 7.
VIII_{11} aus VI_1, 3; VI_2, 1_a; VII_3, 1; VII_4, 1.
VIII_{12} aus VI_1, 3_a und VII_3, 1.
VIII_{13} aus VI_1, 2_a.
VIII_{14} aus VI_1, 2_a und VII_3, 5.
VIII_{15} aus VI_1, 3_a.

§ 58. Es lassen sich aus der Uebersicht der autopolaren Vielflache als nahe liegend einige allgemeinere Folgerungen ziehen:

1. ***Die Pyramiden mit gerader Flächenzahl*** gestatten, ausser der in § 53, a besprochenen, für alle Pyramiden geltenden, noch eine zweite polare Zusammensetzung:

die Pyramide VI_0 aus V_1, 1_a (§ 54), (Fig. 65);
die Pyramide VIII_0 aus VI_1, 1_a (§ 55, 1), (Fig. 65_a);
die Pyramide X_0 aus VII_1, 1_a, (Fig. 65_b);
die Pyramide XII_0 aus VIII_1, 1_a u. s. w. (Fig. 65_c).

2. Den Pyramiden zunächst stehen als autopolare Körper $(n+2)$-***Flache mit f_n und f_4, also auch e_n und e_4, und n Dreiecken und n dreikantigen Ecken,*** wie

$$VI_1\colon\ (f_4, f_4, 4f_3) \equiv (e_4, e_4, 4e_3);$$
$$VII_4\colon\ (f_5, f_4, 5f_3) \equiv (e_5, e_4, 5e_3);$$
$$VIII_{13}\colon\ (f_6, f_4, 6f_3) \equiv (e_6, e_4, 6e_3) \text{ u. s. w.}$$

Ein derartiges $(n+2)$-Flach geht aus einer n-seitigen Pyramide hervor, wenn man durch eine Grundecke (e_0) eine Ebene legt, die von der Pyramide ein Vierflach abschneidet, ohne durch die Spitze oder eine zweite Grundecke zu gehen. Bei diesem Verfahren bleibt die Kantenzahl n der Grundfläche und der Spitze ungeändert, wird die Grundecke e_0 und eine Seitenfläche s_0 vierkantig und kommt ein Dreieck als Seitenfläche und eine dreikantige Seitenecke hinzu. Dass aber das $(n+2)$-Flach *autopolar* ist, ergiebt sich daraus, dass man dasselbe auch durch polare Zusammensetzung:

aus $V_1, 1$ das Fünfflach (die vierseitige Pyramide); aus $V_0, 1$ das Sechsflach; aus $VI_2, 1$ das Siebenflach; aus $VI_1, 2_a$ das Achtflach; aus $VII_2, 7_a$ das Neunflach; aus $VII_1, 2_a$ das Zehnflach; aus $VIII_2, 42_a$ das Elfflach; aus $VIII_1, 2_a$ das Zwölfflach u. s. w. erhält, so dass sich ebenfalls ein Unterschied bei den autopolaren Vielflachen mit gerader und ungerader Flächenzahl herausstellt. —

Auch andere Systeme autopolarer Körper lassen sich durch polare Zusammensetzung einfacher Körpersysteme bilden.

Das Verfahren in No. 2 zur Herstellung eines autopolaren $(n+2)$-Flachs aus einer n-seitigen Pyramide lässt sich auch so auffassen, dass über einem Seitendreieck der Pyramide als Grundfläche eine dreiseitige Pyramide errichtet wird, deren Spitze auf einer erweiterten benachbarten Seitenfläche der Pyramide liegt. Bei diesem Aufbau erfahren nur zwei Nachbardreiecke der Pyramide eine Aenderung. Haben dieselben die Seitenkante k gemeinschaftlich, so wird das eine Dreieck zu einem Viereck erweitert, indem k durch zwei zusammenhängende Kanten k_1 und k_2 ersetzt, das andere aber durch zwei Dreiecke mit den Seiten k_1 und k_2 überdeckt wird, deren zweite gemeinschaftliche Ecke e_4 vierkantig wird (Fig. 66). Wird also der gleiche Aufbau auf einem von zwei benachbarten Dreiecken eines autopolaren Körpers K_n ausgeführt, so ergiebt sich ein Körper K_{n+1}, der ebenfalls, wenn die freie Ecke des überbauten Dreiecks auf K_n dreikantig ist, im allgemeinen autopolar ist.

Bei Wiederholung eines derartigen Aufbaus einer dreiseitigen Pyramide auf einem von zwei benachbarten Dreiecken, so dass die Spitze auf der erweiterten Ebene des zweiten Dreiecks liegt, auf den sich neu ergebenden Dreiecken, erhält man eine Reihe von autopolaren Körpern, die, wenn man von der dreiseitigen Pyramide ausgeht, abgesehen von den entgegengesetzten oberen und unteren Enden, wo je zwei Dreiecke mit zwei dreikantigen

Ecken vorkommen, durchweg von Vierecken mit (fast durchweg) vierkantigen Ecken begrenzt sind (s. die Figuren 67_a—67_g).

Die vierkantigen Ecken sind nummerirt.

Die zugehörigen ***Flächen- oder Eckenformeln*** sind:

A. $(3;\ 3,\ 3,\ 3)$. (IV_0).

B. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 3_1,\ 4,\ 3_1;\ 3_1)$. (V_0).

C. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_2,\ 4_1;\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_2)$. (VI_1).

D. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_{23},\ 4_{13};\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_3)$. (VII_3).

E. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_{23},\ 4_{134};\ 4_{124},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ \overline{4}_3,\ 3_{24},\ \overline{4}_4;\ 3_4)$. (VIII_4).

F. $(3_1;\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ 4_{23},\ 4_{134};\ 4_{1245},\ \overline{4}_2,\ 4_{235},\ \overline{4}_3,\ 4_{34},\ \overline{4}_4;\ 3_{45},\ \overline{4}_5,\ 3_5)$.

u. s. w.

Bei diesem Verfahren des Ansetzens einer dreiseitigen Pyramide an eine beliebige andere Pyramide oder, unter einer gewissen Voraussetzung, an einen autopolaren Körper, lässt sich die dreiseitige Pyramide auch durch eine vier- oder mehrseitige Pyramide ersetzen. So entsteht das ***autopolare Siebenflach*** VII_4 durch Zusammensetzen zweier vierseitigen Pyramiden, das autopolare Achtflach VIII_{10} durch Aneinandersetzen einer vierseitigen und einer fünfseitigen Pyramide u. s. w.

Hier sei nur noch auf die grosse Anzahl von parapolaren Körpern aufmerksam gemacht, die sich in den letzten Paragraphen bei der Darstellung der autopolaren Körper nebenbei ergeben haben (vergl. § 59).

§ 59. ***Die parapolaren Körper.*** Durch polare Zusammensetzung haben sich aus VI_2, 1 oder VI_1, d. h. aus dem autopolaren Sechsflach, die beiden ***parapolaren Siebenflache*** VII_2, 11 und VII_3, 1 (§ 54, 2) herleiten lassen. Ferner

1. aus VI_1, 2_a (§ 52) die ***parapolaren Achtflache*** VIII_2, 88 pp. VIII_3, 37, und VIII_2, 89 pp. VIII_3, 8.
2. aus VI_2, 1_a (§ 55) ... VIII_3, 63 pp. VIII_4, 1.
3. aus VI_2, 1_b (§ 55) ... VIII_3, 61 pp. VIII_4, 5.
4. aus VII_2, 7 (§ 56) ... VIII_2, 88 pp. VIII_3, 37 und VIII_3, 34 pp. VIII_3, 53.

Ausserdem ergeben sich im allgemeinen parapolare Körper aus gleichwerthigen Körpern (§ 28), indem der eine mit dem polaren Körper des anderen zusammengesetzt wird, also ***durch wechselseitige Zusammensetzung gleichwerthiger F- und E-Körper.*** Bisweilen jedoch ist bei einer derartigen Zusammensetzung das Ergebniss ein autopolarer Körper.

In der folgenden Zusammenstellung sind nur die Ergebnisse kurz aufgeführt.

Durch ***wechselseitige Zusammensetzung*** entstehen:

1_a. aus *F.* VI_1, 3 und *E.* VI_1, 3_a die ***parapolaren Achtflache*** VIII_3, 67; VIII_3, 63; VIII_4, 10; — aus *E.* VI_1, 3 und *F.* VI_1, 3_a die ***parapolaren Achtflache*** VIII_4, 9; VIII_4, 1; VIII_4, 17. Unter ihnen sind paarweise zusammengehörig: VIII_3, 67 pp. VIII_4, 9; VIII_3, 63 pp. VIII_4, 1; VIII_4, 10 pp. VIII_4, 17.

2_a. aus *F.* VI_2, 1_a mit *E.* VI_2, 1_b die Achtflache VIII_3, 62; VIII_2, 93; VIII_3, 65; VIII_2, 88; VIII_3, 61; — aus *E.* VI_2, 1_a und *F.* VI_2, 1_b die Achtflache VIII_4, 4; VIII_4, 2; VIII_4, 5; VIII_3, 37; VIII_4, 3. Von ihnen sind VIII_3, 62 pp VIII_4, 2; VIII_2, 93 pp. VIII_4, 4; VIII_3, 65 pp. VIII_4, 3; VIII_2, 88 pp. VIII_3, 37; VIII_3, 61 pp. VIII_4, 5. Ausserdem ergiebt sich bei beiden Zusammensetzungen das ***autopolare Achtflach*** VIII_3, $38 \equiv VIII_9$.

3_a aus *F.* VI_1, 2_a und *E.* VI_1, 3 die Achtflache VIII_3, 8; VIII_4, 9; VIII_4, 4; — aus den polaren Körpern *E.* VI_1, 2_a und *F.* VI_1, 3 die Achtflache VIII_2, 89; VIII_3, 67; VIII_2, 93; von denen VIII_3, 8 pp. VIII_2, 89; VIII_4, 9 pp. VIII_3, 67; VIII_4, 4 pp. VIII_2, 93. Ferner entsteht durch beide Zusammensetzungen das ***autopolare Achtflach*** VIII_3, $52 \equiv VIII_8$.

4_a. aus *F.* VI_1, 2_a und *E.* VI_1, 3_a, ferner aus *E.* VI_1, 2_a mit *F.* VI_1, 3_a die Achtflache VIII_3, 53 pp. VIII_3, 34; VIII_4, 3 pp. VIII_3, 65; — und die ***beiden autopolaren Achtflache*** VIII_3, $51 \equiv VIII_{14}$ und VIII_3, $32 \equiv VIII_2$.

5_a. aus *F.* VI_1, 1_a und *E.* VI_2, 1_a; ferner aus *E.* VI_1, 1_a und *F.* VI_2, 1_a die Achtflache VIII_3, 53 pp. VIII_3, 34 und VIII_3, 8 pp. VIII_2, 89; — und das ***autopolare Achtflach*** VIII_2, $42 \equiv VIII_{13}$.

6_a. aus *F.* VI_1, 1_a und *E.* VI_2, 1_b, ferner aus *E.* VI_1, 1_a und *F.* VI_2, 1_b die Achtflache VIII_2, 89 pp. VIII_3, 8; — und die ***beiden autopolaren Achtflache*** VIII_3, $33 \equiv VIII_3$ und VIII_2, $42 \equiv VIII_{13}$.

7_a. aus *F.* VII_1, 2 und *E.* VII_2, 1, ferner aus *E.* VII_1, 2 und *F.* VII_2, 1 die Achtflache VIII_3, 64 pp. VIII_4, 7 und VIII_3, 65 pp. VIII_4, 3.

8_a. aus *F.* VII_2, 7 und *E.* VII_3, 1, ferner aus *E.* VII_2, 7 und *F.* VII_3, 1 die Achtflache VIII_3, 67 pp. VIII_4, 9; VIII_3, 61 pp. VIII_4, 5; VIII_3, 63 pp. VIII_4, 1; VIII_2, 93 pp. VIII_4, 4; — und das ***autopolare Achtflach*** VIII_3, $54 \equiv VIII_7$.

9_a. aus *F.* VII_4, 1 und *E.* VII_3, 5, ferner aus *E.* VII_4, 1 und *F.* VII_3, 5 die Achtflache VIII_3, 67 pp. VIII_4, 9 und VIII_3, 66 pp. VIII_4, 6. —

Demnach haben sich, abgesehen von den autopolaren Achtflachen

VIII_2, VIII_3, VIII_7, VIII_8, VIII_9, VIII_{13}, VIII_{14}, ergeben *die parapolaren Achtflache:*

VIII_3, 67 pp. VIII_4, 9 viermal; . . . VIII_2, 88 pp. VIII_3, 37; VIII_3, 63 pp. VIII_4, 1; VIII_3, 61 pp. VIII_4, 5; VIII_2, 93 pp. VIII_4, 4; VIII_3, 65 pp. VIII_4, 3; VIII_2, 89 pp. VIII_3, 8 dreimal; . . . VIII_3, 34 pp. VIII_3, 53 zweimal; . . . VIII_4, 10 pp. VIII_4, 17; VIII_3, 62 pp. VIII_4, 2; VIII_3, 64 pp. VIII_4, 7; VIII_3, 66 pp. VIII_4, 6 einmal; —

also die sämmtlichen parapolaren Achtflache, mit Ausnahme der beiden Achtflache VIII_4, 16 und VIII_4, 18, die eine besondere Behandlung erfordern.

§ 60. Die zu einander polaren Achtflache VIII_4, 16 und VIII_4, 18 sind je von vier Vierecken und vier Dreiecken eingeschlossen, die symmetrisch zu einander liegen, so dass beide Achtflache nur zwei verschiedene Darstellungen gestatten durch ihre *F*- oder *E*-Formel, jenachdem man sie auf ein Viereck, bezüglich Dreieck als Grundfläche, oder auf eine vierkantige, bezüglich dreikantige Ecke als Grundecke bezieht, nämlich:

VIII_4, 16. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 3_{23},\ 4_{34},\ 3_{14};\ 4_{14},\ \overline{4}_4,\ 3_{34},\ \overline{4}_3,\ 4_{23})$.
VIII_4, 16_a. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 4_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 4_{14};\ 3_{14},\ \overline{4}_4,\ 3_{34},\ \overline{4}_3,\ 3_{23},\ 4_{34})$.

VIII_4, 18. $(4_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{13},\ 4_{23},\ \overline{4}_2,\ 3_{24},\ 4_{14};\ 3_{13},\ \overline{4}_3,\ 4_{34},\ \overline{4}_4,\ 3_{24})$.
VIII_4, 18_a. $(3_{12};\ \overline{4}_1,\ 3_{12},\ \overline{4}_2,\ 4_{23},\ 4_{13};\ 4_{14},\ 4_{24},\ 3_{34},\ \overline{4}_3,\ 3_{34};\ \overline{4}_4)$.

Bei Vervollständigung des Figurennetzes zu *F*. VIII_4, 16 (Fig. 68_a) zeigt sich sofort, dass man sich den Körper VIII_4, 16 vorstellen kann als entstanden durch unmittelbare Zusammenfügung zweier Dachkörper V_0, 1 über der gleichen Grundfläche, so dass die Giebelflächen des einen je mit den Dachflächen des anderen eine Grundkante gemeinschaftlich haben und die vier Dreiecke nur durch ihre Ecken in Verbindung stehen. Ebenso haben die vier dreikantigen Ecken des polaren Körpers VIII_4, 18 keine Kante gemeinschaftlich (Fig. 68_b). Dieses Achtflach lässt sich etwa beschreiben als hervorgegangen aus einem Sechsflach VI_0, 2, dessen Grundfläche und Deckfläche (kreuzweis) gebrochen sind. —

Die *F*-Formel des dem Doppeldach VIII_4, 16 zu Grunde liegenden Fünfflachs V_0, 1 ist:

$$(4;\ 3,\ 4,\ 3,\ 4).$$

Bei Zusammenlegung der Grundflächen der beiden Fünfflache gehen

die Grundflächen verloren, und es würde der *F*-Formel des Doppeldaches VIII_4, 16, also auch der *E*-Formel von VIII_4, 18 eine Form wie:

$$(3, 4, 3, 4; 3, 4, 3, 4)$$

zu Grunde zu legen sein. Um jedoch die vierkantigen Ecken des ersteren und die vierkantigen Flächen des letzteren ebenfalls anzudeuten, bezeichne man dieselben der Reihe nach mit den Stellenzeigern 1, 2, 3, 4, und so ergiebt sich die Formel:

$$(3_{12}, 4_{23}, 3_{34}, 4_{41}; \overline{4}_1, \overline{4}_2, \overline{4}_3, \overline{4}_4; 3_{41}, 4_{12}, 3_{23}, 4_{34}),$$

die als *F*-Formel dem Körper VIII_4, 16, als *E*-Formel dem Körper VIII_4, 18 zugehört.

Werden die beiden Dachkörper V_0, 1 so zusammengesetzt, dass die Giebeldreiecke je eine Kante gemeinschaftlich haben, so entsteht das autopolare Achtflach VIII_4, $19 \equiv VIII_5$:

$$(3_{12}, 4_{23}, 3_{34}, 4_{41}; \overline{4}_1, \overline{4}_2, \overline{4}_3, \overline{4}_4; 4_{41}, 3_{12}, 4_{23}, 3_{34}).$$

§ 61. Um zuletzt noch die Frage zu besprechen, ob ausser dem Dachkörper noch andere Körper durch (unmittelbare) Zusammensetzung mit sich selbst einen *EF*-Körper ergeben, mögen e und f die bisherige Bedeutung der Ecken- und Flächenzahl für den gegebenen, e_0 und f_0 für den zusammengesetzten Körper haben, so ist:

$$1. \quad f_0 = 2f - 2$$

und

$$2. \quad e_0 = 2e - n,$$

wenn n die Kantenzahl der zusammengelegten Flächen bedeutet. Also für einen *EF*-Körper, d. h. wenn $e_0 = f_0$ wird, ergiebt sich:

$$3. \quad e - f = \frac{n-2}{2}.$$

Demnach ist einmal, wenn f_0 (stets eine gerade Zahl, Gl. 1) gegeben ist, f vollständig bestimmt, also für

$$f_0 = 6, \quad f = 4,$$
$$f_0 = 8, \quad f = 5,$$
$$f_0 = 10, \quad f = 6, \text{ u. s. w.};$$

ferner ist n (Gl. 3) immer eine gerade Zahl. — Ein Sechseckflach lässt sich also durch Zusammensetzen zweier Vierflache nicht erhalten. — Für den Werth $f = 5$ lässt sich für n nur der Werth 4 annehmen, so dass $e = 6$ wird, entsprechend dem Fünfflach V_0, 1. Demnach ist VIII_4, 16 das einzige

Achteckflach, welches sich durch Zusammensetzen eines Fünfflachs mit sich selbst gewinnen lässt. — Die Neuneckflache sind auszuschliessen. —

Für $e_0 = f_0 = 10$ wird $f = 6$, und weil n mindestens gleich 4 sein muss und als gerade Zahl höchstens gleich 4 sein kann, wird nothwendig $e = 7$. Demnach sind zur Zusammensetzung mit sich selbst auf der Grundfläche nur geeignet die F-flache:

$$VI_1, 2_a; \quad VI_1, 3; \quad VI_1, 3_a,$$

denen einzeln bezüglich 8, 3, 3, insgesammt 14 Zehneckflache zugehören.

Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Fortsetzung).

(Von Herrn *Georg Wallenberg* in Charlottenburg.)

In meiner Arbeit „Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung“ (dieses Journal Bd. 116, S. 1—9) habe ich (S. 9), den ursprünglichen Ausgangspunkt umkehrend, folgenden Satz bewiesen: „Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ein algebraisches Particularintegral erster Ordnung besitzt, welches ausser dem von y' und y freien Gliede mindestens Glieder zweier verschiedener Dimensionen enthält, so sind ihre sämmtlichen Integrale algebraisch“. Während der eine Ausnahmefall, dass nämlich in dem Particularintegral das von y' und y freie Glied fehlt, dort (S. 8) bereits erledigt worden ist, indem die Bedingung angegeben wurde, unter der auch in diesem Falle die Integrale algebraisch sind, hatte ich mir die Erledigung des zweiten Ausnahmefalles, in welchem das Particularintegral ausser dem von y' und y freien Gliede nur Glieder *einer* Dimension enthält, daselbst vorbehalten. Dieser Ausnahmefall soll in der vorliegenden Arbeit erledigt werden*); die dabei gewonnenen Resultate ergänzen zugleich die in meiner Dissertation enthaltenen Untersuchungen sowie die diesbezüglichen Entwickelungen von *Königsberger* (Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig 1882, Kap. I—III) und *Krause* (Diss., Göttingen 1897). Die Methode, deren ich mich bediene, gestattet einen klaren Einblick in den Zusammenhang zwischen der Structur der Differentialgleichung und der Natur ihrer Integrale, insbesondere ihrer algebraischen Integrirbarkeit,

*) Es stellt sich dabei als opportun heraus, den Rationalitätsbereich der Coefficienten auf algebraische Functionen der unabhängigen Variablen zu erweitern.

und ermöglicht gleichzeitig, sämmtliche Typen der in Frage stehenden Differentialgleichungen nebst ihren Integralen aufzustellen.

Die lineare homogene Differentialgleichung

$$y''+\lambda y'+\mu y = 0, \tag{1.}$$

deren Coefficienten algebraische Functionen der unabhängigen Variablen z sind, möge ein Particularintegral erster Ordnung von der Form

$$(y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho_2 y)^{p_2}\dots(y'-\varrho_n y)^{p_n} = \alpha \tag{2.}$$

besitzen, worin $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n, \alpha$ algebraische Functionen von z und $p_1, p_2, \dots, p_n$ ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler bedeuten. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1.) hat die Form

$$y = \bar{c}_1\eta_1+\bar{c}_2\eta_2,$$

wenn $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ die willkürlichen Constanten und η_1, η_2 zwei Fundamentalintegrale von (1.) sind. Da auch das allgemeine Integral von (2.) in dieser Form enthalten sein und aus ihr dadurch hervorgehen muss, dass man zwischen $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ eine gewisse Beziehung mit constanten Coefficienten statuirt, so muss umgekehrt, wenn man

$$y = \bar{c}_1\eta_1+\bar{c}_2\eta_2$$

und

$$y' = \bar{c}_1\eta_1'+\bar{c}_2\eta_2'$$

in (2.) einsetzt, eben jene Relation mit constanten Coefficienten zwischen $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ sich ergeben. Nun ist

$$y'-\varrho_i y = \bar{c}_1(\eta_1'-\varrho_i\eta_1)+\bar{c}_2(\eta_2'-\varrho_i\eta_2);$$

es muss also

$$\eta_2'-\varrho_i\eta_2 = K_i(\eta_1'-\varrho_i\eta_1)$$

sein, wo K_i eine Constante bedeutet. Daraus ergiebt sich

$$\varrho_i = \frac{K_i\eta_1'-\eta_2'}{K_i\eta_1-\eta_2},$$

also

$$K_i\eta_1-\eta_2 = c_i e^{\int \varrho_i dz},$$

d. h. es muss $e^{\int \varrho_i dz}$ ein Particularintegral von (1.) sein. Insbesondere müssen

$$K_1\eta_1-\eta_2 = c_1 e^{\int \varrho_1 dz}$$

und

$$K_2\eta_1-\eta_2 = c_2 e^{\int \varrho_2 dz}$$

zwei Fundamentalintegrale von (1.) sein, da ϱ_2 von ϱ_1, also auch K_2 von K_1 verschieden ist; das allgemeine Integral von (1.) lautet also

$$y = -c_1 e^{\int \varrho_1 dz} + c_2 e^{\int \varrho_2 dz},$$

wenn man jetzt c_1 und c_2 willkürlich lässt. Daher wird

$$y'-\varrho_i y = -c_1 e^{\int \varrho_1 dz}(\varrho_1-\varrho_i)+c_2 e^{\int \varrho_2 dz}(\varrho_2-\varrho_i),$$

und es muss

$$(\varrho_2-\varrho_i)e^{\int \varrho_2 dz} = -k_i(\varrho_1-\varrho_i)e^{\int \varrho_1 dz} \qquad (k_i \text{ Constante})$$

sein, daraus folgt:

$$\varrho_i = \frac{k_i\varrho_1 e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+\varrho_2}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1},$$

also

$$\varrho_i-\varrho_1 = \frac{\varrho_2-\varrho_1}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\ldots,n \\ k_1=\infty,\ k_2=0\end{smallmatrix}\right),$$

und

$$y'-\varrho_1 y = c_2(\varrho_2-\varrho_1)e^{\int \varrho_2 dz},$$

$$y'-\varrho_2 y = c_1(\varrho_2-\varrho_1)e^{\int \varrho_1 dz},$$

$$y'-\varrho_i y = (k_i c_2+c_1)(\varrho_i-\varrho_1)e^{\int \varrho_1 dz} = \frac{(k_i c_2+c_1)(\varrho_2-\varrho_1)e^{\int \varrho_1 dz}}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1} \qquad (i=3,4,\ldots,n).$$

Die Einsetzung dieser Werthe in (2.) ergiebt

$$\alpha = \frac{c_1^{p_2}c_2^{p_1}\prod_{i=3}^{i=n}(c_1+k_i c_2)^{p_i}\cdot(\varrho_2-\varrho_1)^m e^{\int(p_1\varrho_2+(m-p_1)\varrho_1)dz}}{\prod_{i=3}^{i=n}(k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1)^{p_i}},$$

worin $m = p_1+p_2+\cdots+p_n$ die Dimension der Differentialgleichung (2.) ist. Da der Coefficient α keine *willkürliche* Constante enthalten darf, so muss

$$(3.) \qquad c_1^{p_2}c_2^{p_1}\prod_{i=n}^{i=n}(c_1+k_i c_2)^{p_i} = k$$

sein, wo k eine *feste* Constante bedeutet. Die Differentialgleichung (2.)

nimmt daher die Gestalt an

$$(A.)\quad (y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho_2 y)^{p_2}\cdot\prod_{i=3}^{i=n}(y'-\frac{k_i\varrho_1 e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+\varrho_2}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1}y)^{p_i}=\frac{k(\varrho_2-\varrho_1)^m e^{m\int\varrho_1 dz}}{e^{p_1\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}\prod_{i=3}^{i=n}(k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1)^{p_i}}.$$

Es sind nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. ***Es sind mehr als zwei verschiedene Linearfactoren vorhanden.*** In diesem Falle müssen, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung (A.) algebraisch sein sollen, $e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}$ und $e^{\int\varrho_1 dz}$, also auch $e^{\int\varrho_1 dz}$ und $e^{\int\varrho_2 dz}$ algebraische Functionen von z sein. ***Daher ist auch das allgemeine Integral von*** (1.) ***selber eine algebraische Function von z.***

2. ***Es sind nur zwei verschiedene Linearfactoren vorhanden****). Dann lautet die Differentialgleichung (A.)

$$(B.)\qquad (y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho\ y)^{p_2}=k(\varrho_2-\varrho_1)^{p_1+p_2}e^{\int(p_2\varrho_1+p_1\varrho_2)dz},$$

und es muss $e^{\int(p_2\varrho_1+p_1\varrho_2)dz}$ eine algebraische Function von z sein: d. h. die Particularintegrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.)

$$\eta_1=e^{\int\varrho_1 dz}\quad\text{und}\quad\eta_2=e^{\int\varrho_2 dz}$$

brauchen selber ***keine*** algebraischen Functionen von z zu sein; sie genügen aber einer Relation von der Form

$$\eta_1^{p_2}\eta_2^{p_1}=\beta,$$

wo β eine algebraische Function von z ist**).

Ist insbesondere $p_1=p_2=1$, so lautet unsere Differentialgleichung

$$(C.)\qquad (y'-\varrho_1 y)(y'-\varrho_2 y)=k(\varrho_1-\varrho_2)^2 e^{\int(\varrho_1+\varrho_2)dz}.$$

Schreibt man die linke Seite derselben in der Form

$$y'^2-2pyy'+qy^2,$$

so ist

$$\varrho_1+\varrho_2=2p,\quad(\varrho_1-\varrho_2)^2=4(p^2-q),$$

und die Differentialgleichung nimmt die Gestalt an

$$(C^*.)\qquad y'^2-2pyy'+qy^2=4k(p^2-q)e^{2\int p\,dz};$$

*) Der Fall eines einzigen Linearfactoren erledigt sich von selbst, da er auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung führt.

) Cfr. ***Königsberger,* l. c., p. 113—119.

damit die Coefficienten algebraische Functionen seien, muss p die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function sein.

Das allgemeine Integral lautet

$$y = ce^{\int (p+\sqrt{p^2-q})\,dz} - \frac{k}{c} e^{\int (p-\sqrt{p^2-q})\,dz};$$

dasselbe ist nur dann algebraisch, wenn auch $\sqrt{p^2-q}$ die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function ist.

Schreibt man ferner die Differentialgleichung (B.) in der Form

$$F \equiv (a_1 y' + b_1 y)^k (a_2 y' + b_2 y)^l = 1,$$

so kann man, da wegen der Irreductibilität der Differentialgleichung k von l verschieden ist (abgesehen von dem eben behandelten Falle $k = l = 1$), ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$$

voraussetzen, indem man, wenn dies nicht der Fall ist, nur a_1 und b_1 mit $\sqrt[k-l]{\Delta^l}$, a_2 und b_2 mit $\sqrt[l-k]{\Delta^k}$ zu multipliciren braucht. Benutzt man jetzt die Relation

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{\partial F}{\partial y'} (\lambda y' + \mu y)^*),$$

*) Cfr. meine Arbeit, l. c., p. 6. — Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass die allgemeine *Poincaré*sche Relation (Acta Math. 7: 1, p. 3)

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = P \cdot F + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}$$

einer Modification bedarf: es sei nämlich $D(z, y)$ derjenige Theiler der Discriminante von $F(z, y, y') = 0$, welcher die mehrfachen Factoren derselben sämmtlich in der ersten Potenz enthält, so lautet die fragliche Relation

$$D(z, y)\left[\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right] = P \cdot F + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial y'},$$

wo nunmehr P und Q in der That, wie *Poincaré* es thut, als *ganze* rationale Functionen von y und y' angenommen werden können. So genügt z. B. die linke Seite der Differentialgleichung

$$F \equiv x^2(x+1)y'^2 - x(y-1)(xy+2)y' + (y-1)^2 = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$y = \frac{1 + c^2 x}{1 + cx}$$

ist, der Relation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{4y'}{y-1} F + 2\left(\frac{y'}{x} - \frac{y'^2}{y-1}\right)\frac{\partial F}{\partial y'};$$

in der That ist hier $y = 1$ eine Doppelwurzel der Discriminantengleichung.

so ergeben sich durch Coefficientenvergleichung unter mehrfacher Benutzung der Gleichung $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$ für b_1 und b_2 die Werthe

$$b_1 = -\frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 + k}{(k+l) a_2},$$

$$b_2 = -\frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 - l}{(k+l) a_1}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auf dem folgenden Wege: Man setze

$$(4.) \qquad \begin{cases} a_1 y' + b_1 y = \varphi^l \\ a_2 y' + b_2 y = \varphi^{-k}, \end{cases}$$

dann kann man, da k und l relativ prim sind, zwei Zahlen m und n so bestimmen, dass $ml - nk = 1$ ist; daher muss $\varphi = (a_1 y' + b_1 y)^m (a_2 y' + b_2 y)^n$ infolge der über die Differentialgleichung (B.) gemachten Vorraussetzungen feste Verzweigungspunkte besitzen. Aus den Gleichungen (4.) folgt nun

$$y = a_1 \varphi^{-k} - a_2 \varphi^l,$$

$$y' = -b_1 \varphi^{-k} + b_2 \varphi^l,$$

und daraus durch Differentiation der ersten Gleichung und Vergleichung mit der zweiten

$$(5.) \qquad \varphi' = \frac{(a_1' + b_1)\varphi - (a_2' + b_2)\varphi^{k+l+1}}{k a_1 + l a_2 \varphi^{k+l}}.$$

Da die Function φ feste Verzweigungspunkte besitzt, so muss

$$a_1' + b_1 = \varrho k a_1,$$

$$a_2' + b_2 = -\varrho l a_2,$$

also

$$b_1 = \varrho k a_1 - a_1',$$

$$b_2 = -\varrho l a_2 - a_2'$$

sein. Die Beziehung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & \varrho k a_1 - a_1' \\ a_2, & -\varrho l a_2 - a_2' \end{vmatrix} = 1$$

ergiebt für ϱ den Werth

$$\varrho = \frac{a_1' a_2 - a_1 a_2' - 1}{(k+l) a_1 a_2};$$

die dadurch gewonnenen Werthe für b_1 und b_2 stimmen mit den oben gefundenen überein. Diese Methode liefert aber auch das Integral der vorliegenden Differentialgleichung; aus (5.) ergiebt sich nämlich unter Berücksichtigung der folgenden Gleichungen:

$$\varphi' = \varrho \cdot \varphi,$$

also

$$\varphi = ce^{\int \varrho dz} = c\sqrt[k+l]{\frac{a_1}{a_2}}\, e^{-\frac{1}{k+l}\int \frac{dz}{a_1 a_2}},$$

und daher als Integral der Differentialgleichung

$$(\mathrm{B}^*.)\quad \left(a_1 y' - \frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 + k}{(k+l)a_2} y\right)^k \left(a_2 y' - \frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 - l}{(k+l)a_1} y\right)^l = 1:$$

$$y = c^{-k} a_1^{\frac{l}{k+l}} a_2^{\frac{k}{k+l}} e^{\frac{k}{k+l}\int \frac{dz}{a_1 a_2}} - c^l a_1^{\frac{l}{k+l}} a_2^{\frac{k}{k+l}} e^{-\frac{l}{k+l}\int \frac{dz}{a_1 a_2}};$$

dasselbe ist nur dann algebraisch, wenn $\frac{1}{a_1 a_2}$ die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function ist.

Es ist von Interesse, diejenigen in jedem Falle algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen (2.) zu bestimmen, deren Geschlecht kleiner als 2 ist, da für diese der *Poincaré*sche Satz*) die algebraische Integrirbarkeit nicht ergiebt. Wir haben gefunden, dass die Differentialgleichung (2.) nur dann stets algebraisch integrirbar ist, wenn die Anzahl der Linearfactoren grösser als 2 ist; wir können also $n > 2$ voraussetzen (es ist übrigens leicht ersichtlich, dass die Differentialgleichung (2.) im Falle $n \leqq 2$ vom Geschlecht 0 ist). — Wendet man auf (2.) die birationale Transformation

$$y' = v, \quad y = u \cdot v$$

an, so hat die (u, v)-Curve dasselbe Geschlecht. Besitzt nun $m = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ mit p_r den gemeinsamen Theiler q_r, so ist für die algebraische Function v von u die Anzahl der Verzweigungen

$$w = n(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n);$$

daher ergiebt die bekannte *Riemann*sche Relation

$$w = 2m + 2(p-1)$$

für p den Werth

$$p = \frac{(n-2)(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n) + 2}{2}.$$

Da $q_i \leqq p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist, so muss, wenn $n > 3$ ist,

$$p > 1$$

sein; wir haben uns also nur mit dem Falle $n = 3$ zu beschäftigen; in diesem Falle ist

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - (q_1 + q_2 + q_3) + 2}{2},$$

*) Acta Math. 7: 1; cfr. die Diss. des Verf., p. 2.

und es kann nur dann $p = 1$ werden, wenn $q_i = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$, d. h. wenn $p_1 + p_2 + p_3$ durch das kleinste Vielfache von p_1, p_2 und p_3 theilbar ist. Die Discussion der daraus sich ergebenden Diophantischen Gleichung liefert als mögliche Werthe

$$1)\ p_1 = p_2 = p_3 = 1,$$
$$2)\ p_1 = 2,\ p_2 = p_3 = 1,$$
$$3)\ p_1 = 3,\ p_2 = 2,\ p_1 = 1,$$

und als zugehörige Differentialgleichungen

$$(y' - \varrho_1 y)(y' - \varrho_2 y)(y' - \varrho_3 y) = \alpha,$$
$$(y' - \varrho_1 y)^2 (y' - \varrho_2 y)(y' - \varrho_3 y) = \alpha,$$
$$(y' - \varrho_1 y)^3 (y' - \varrho_2 y)^2 (y' - \varrho_3 y) = \alpha,$$

worin ϱ_3 und α in der oben (cfr. Gl. (A.)) gefundenen Weise von ϱ_1 und ϱ_2 abhängen.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate können wir in die folgenden Sätze zusammenfassen:

I. ***Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten ein Particularintegral erster Ordnung von der Form*** (2.) ***besitzt, so sind ihre Integrale algebraisch, falls*** $n > 2$ ***ist.***

Aus diesem Satze, mit den Resultaten meiner oben citirten Arbeit zusammengehalten, folgt:

II. ***Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten reductibel ist, d. h. ein algebraisches Particularintegral erster Ordnung besitzt, so sind ihre Integrale mit zwei Ausnahmen algebraisch. Erste Ausnahme: in dem Particularintegral fehlt das von*** y ***und*** y' ***freie Glied. Zweite Ausnahme: das Particularintegral hat die Form*** (2.) ***und es ist*** $n \leqq 2$. ***In diesen beiden Fällen brauchen die Integrale nicht algebraisch zu sein****); ***doch lassen sich in jedem Falle die Bedingungen angeben, unter denen sie auch hier algebraisch sind.***

Durch den zweiten Satz sind die einzig möglichen Formen der algebraischen Particularintegrale erster Ordnung festgelegt, welche reductible, *nicht* algebraisch integrirbare lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzen können. Eine genauere Discussion des ersten Ausnahme-

*) Sie sind Exponentialfunctionen *Abel*scher Integrale, mit Ausnahme des Falles $n = 1$, wo das Integral einer solchen Exponentialfunction auftreten kann (cfr. p. 163 und *Königsberger*, l. c., p. 18—20).

falles führt nämlich zu dem einzigen Typus

$$\frac{(y'-\varrho_1 y)^{p_1}}{(y'-\varrho_2 y)^{p_2}} = \alpha.$$

Wir können daher schliesslich sagen:

III. ***Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung zwar reductibel, aber nicht algebraisch integrirbar ist, so kann sie nur algebraische Particularintegrale erster Ordnung von der Gestalt***

$$(y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho_2 y)^{p_2} = \alpha$$

besitzen. — Darin sind $\varrho_1, \varrho_2, \alpha$ algebraische Functionen von z, deren Zusammenhang sich aus Gleichung (B.) oder in anderer *F*orm aus (B*.) ergiebt, während p_1 und p_2 ganze Zahlen bedeuten, ***von denen eine auch negativ bez. Null*) sein kann.*** Ihre Integrale sind Exponentialfunctionen *Abel*scher Integrale bez. Integrale*) solcher Functionen.

---

*) Dieser Fall $n = 1$ erledigt sich folgendermassen (cfr. ***Königsberger*** l. c.): Die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche ein Particularintegral erster Ordnung

$$y'-\varrho y = \alpha$$

besitzt, lautet

$$y''-\left(\varrho+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)y'-\left(\varrho'-\frac{\alpha'}{\alpha}\varrho\right)y = 0,$$

und ihr Integral

$$y = c_1 e^{\int \varrho dz} + c_2 e^{\int \varrho dz} \int e^{\int \left(\frac{\alpha'}{\alpha}-\varrho\right)dz} dz.$$

Im Falle $\alpha = 0$ tritt in der Differentialgleichung zweiter Ordnung und ihrem Integral an Stelle von $\frac{\alpha'}{\alpha}$ eine beliebige algebraische Function von z.

Berichtigung zu der Arbeit „Ueber eine Klasse nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (Bd. 120 dieses Journals S. 113ff.).

Seite 129 Zeile 5 von oben muss $\frac{n-2}{n}$ statt $\frac{n-2}{2}$ stehen.

Seite 131 muss die Gleichung $f\left(\frac{y'''}{y'^2}-\frac{y''^2}{y'^3}, y\right) = 0$ unterdrückt werden.

Ueber Differential- und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe von *Gauss* integrirt werden können.

(Von Herrn *W. Heymann* in Chemnitz.)

In der fundamentalen Bedeutung der hypergeometrischen Function $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist es begründet, dass ihre Differentialgleichung

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y = 0 \qquad (1.)$$

geradezu als ***Normalform*** für eine beträchtliche Anzahl anderer Differentialgleichungen angesehen werden kann und muss. Wird dieser Umstand nicht berücksichtigt, so kommt es dahin, dass solche Gleichungen, welche mit (1.) äquivalent sind, zu sehr ausgedehnten und eigentlich ***überflüssigen*** Untersuchungen führen. Ein Beispiel hierzu bildet die in den fünfziger Jahren und später umständlich discutirte Differentialgleichung

$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = 0. \qquad (2.)$$

In der That genügt es, den besonderen Fall $\beta = m$, $x = x' : m$, für $m = \infty$ der Gleichung (1.) zu betrachten, auf welchen ***Kummer*** in seiner klassischen Arbeit „Ueber die hypergeometrische Reihe“, dieses Journal, Bd. 15 (1836), aufmerksam macht, um sofort zu erkennen, dass (1.) die geeignete Normalform für (2.) ist, wenn letztere mit der Substitution $y = e^{\lambda x}\cdot z$ zuvor von dem Gliede b_0x befreit wird. Aehnliche Bemerkungen gelten auch für die Gleichung

$$a_2y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x+c_0x^2)y = 0, \qquad (3.)$$

insofern diese auf (2.) zurückgeführt werden kann, wie hinlänglich bekannt ist.

Ich habe an anderer Stelle eine grössere Anzahl verwandter Differentialgleichungen aufgestellt*) und gezeigt, wie man dieselben in die

*) Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen. Teubner, 1891.

Gleichung (1.) transformirt. Als besonders bemerkenswerthe Fälle seien folgende Differentialgleichungen erster Ordnung genannt:

$$(4.)\quad \begin{cases} (a+2bx+cx^2)y'+Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0; \\ \text{Substitution: } y=(a+2bx+cx^2)z+g+hx, \quad z=\dfrac{dw}{w\,dx}. \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} (a+bx+cx^2+dx^3)y'+(a_2+b_2x)y^2+(a_1+b_1x)y+(a_0+b_0x)=0; \\ \text{Substitution: } \quad x=\dfrac{1+\lambda u}{u}, \qquad y=\dfrac{1+\mu v}{v}. \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \left.\begin{matrix}(a_1x^2+b_1y^2+2c_1xy)dx+(a_2x^2+b_2y^2+2c_2xy)dy \\ +(Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F)(x\,dy-y\,dx)\end{matrix}\right\}=0; \\ \text{Substitution: } \quad x=\dfrac{u}{v}, \qquad y=\dfrac{1+\mu u}{v}. \end{cases}$$

$$(7.)\quad \begin{cases} \left.\begin{matrix}(A_1x^2+B_1y^2+2C_1xy+2D_1x+2E_1y+F_1)dx \\ +(A_2x^2+B_2y^2+2C_2xy+2D_2x+2E_2y+F_2)dy\end{matrix}\right\}=0; \\ \text{Substitution: } \quad x=\alpha y+u. \end{cases}$$

Die Transformation in Gleichung (4.) resp. (1.) ist nur möglich, wenn der Gleichung (7.) zwei parallele Gerade particulär genügen.

$$(8.)\quad \begin{cases} (a+bx+cx^2+dx^3)\dfrac{dy}{dx}+(a_1+b_1x)y+(c_1+d_1x)z=0, \\ (a+bx+cx^2+dx^3)\dfrac{dz}{dx}+(a_2+b_2x)y+(c_2+d_2x)z=0, \end{cases}$$

Die Integration dieser simultanen Gleichungen lässt sich direct von (5.) abhängig machen; man kann das System aber auch so transformiren, dass nach Elimination von z die gewünschte Normalform (1.) erscheint. Wegen der Einzelheiten, welche die Rechnung mit sich bringt, vergleiche man a. a. O.; hier kommt es uns bloss darauf an, die Aufmerksamkeit auf gewisse Gruppen von Gleichungen zu lenken, deren zahlreiche Parameter schliesslich doch auf nur *drei* Elemente α, β, γ reducirt werden können.

Was wir von der Differentialgleichung (1.) gesagt haben, gilt in noch höherem Maasse von den hypergeometrischen *Differenzengleichungen;* man wolle nur beachten, dass jede „Beziehung zwischen benachbarten (verwandten) Functionen“ bereits eine totale oder partielle lineare Differenzengleichung vorstellt. Uebrigens kann man auch hier bei der Differentialgleichung (1.) anknüpfen und durch h-fache Differentiation nach x eine Differenzengleichung in Bezug auf h ableiten, welche als Normalform der linearen Differenzen-

gleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$(9.) \qquad Az^{(h+2)}+(B+Ch)z^{(h+1)}+(D+Eh+Fh^2)z^{(h)}=0$$

sowie auch

$$(10.) \qquad (A+Bh)z^{(h+2)}+(C+Dh)z^{(h+1)}+(E+Fh)z^{(h)}=0$$

angesehen werden kann. Die Bezeichnung $z^{(h)}$ statt z_h oder z_x, wie man gewöhnlich schreibt, ist für unsere Darstellung die natürlichste, weil wir es zunächst thatsächlich mit höheren Differentialquotienten zu thun haben; die Einführung der Symbole Δ und Δ^2 haben wir gänzlich unterlassen, da hierdurch eine unzweckmässige Vermischung der Coefficienten herbeigeführt wird. Es sei aber gestattet, mit der erst erwähnten Bezeichnung zu wechseln da ein Missverständniss völlig ausgeschlossen erscheint.

Die obigen Differenzengleichungen sind trotz ihres fundamentalen Charakters bisher wenig beachtet worden. Eine Ausnahme macht ***Boole*** in seinem bekannten Lehrbuche;*) allein auch dieser Schriftsteller berücksichtigt nicht, dass die Integrale auf die ***Gauss***sche Function F hinauskommen, sondern bildet die Lösungen in besonderer Weise, wobei die Uebersichtlichkeit nicht gerade gewinnt. — Untersuchungen, welche sich auf die Convergenz der Reihen, auf die rationale Darstellung, d. h. auf das Abbrechen der Reihen infolge ganzer negativer α oder β beziehen, müssen aber bei directer Inangriffnahme der Integration obiger Gleichungen ganz unnöthig wiederholt werden, kurz, alle die werthvollen Resultate, welche von ***Gauss, Kummer*** und nachfolgenden Forschern gesammelt worden sind, bleiben auf diese Weise unbeachtet oder müssen für die neuen und weniger zweckmässig geformten Gleichungen reproducirt werden. Es dürfte daher kein überflüssiges Unternehmen sein, wenn man für alle hier in Betracht kommenden Differenzengleichungen eine ***Normalform*** aussucht, die sich möglichst der Normalform (1.) anschliesst und wie diese durch hypergeometrische Reihen integrirt werden kann.

Eine solche Normalgleichung erhält man in kürzester Weise, wie schon angedeutet, wenn man Gleichung (1.) h-mal nach x differentiirt und sodann h als unabhängige Veränderliche, x dagegen als Parameter ansieht; es entsteht:

$$(11.) \quad x(1-x)y^{(h+2)}+[(1-2x)h+\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y^{(h+1)}-(\alpha+h)(\beta+h)y^{(h)}=0.$$

*) A Treatise on the Calculus of finite Differences. London.

Die zugehörigen Integrale ergeben sich dann ebenfalls durch eine entsprechende Differentiation, und zwar kommt man zu folgenden ***sechs Hauptlösungen:***

$$(12.)\quad \begin{cases} y_1^{(h)} = \dfrac{\Gamma(\alpha+h)\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\gamma+h)} \cdot F(\alpha+h, \beta+h, \gamma+h, x), \\ y_2^{(h)} = (-1)^h \dfrac{\Gamma(\alpha+h)\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1+h)} \cdot F(\alpha+h, \beta+h, \alpha+\beta-\gamma+1+h, 1-x), \\ y_3^{(h)} = (-1)^h x^{-h} \Gamma(\gamma-1+h) \cdot F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma-h, x), \\ y_4^{(h)} = (1-x)^{-h} \Gamma(\alpha+\beta-\gamma+h) \cdot F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1-h, 1-x), \\ y_5^{(h)} = (-1)^h x^{-h} \Gamma(\alpha+h) \cdot F\left(\alpha+h, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \dfrac{1}{x}\right), \\ y_6^{(h)} = (-1)^h x^{-h} \Gamma(\beta+h) \cdot F\left(\beta+h, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \dfrac{1}{x}\right). \end{cases}$$

Diese Art der Herleitung ist zweifellos die kürzeste, sie ist aber nicht ganz einwandsfrei, denn der Differentiationsprocess verlangt, dass h eine ***ganze positive*** Zahl sei, während doch am Ende diese Veränderliche sowohl in der Gleichung (11.), als in den Integralen (12.) jedwede Zahl bedeuten kann. Ich möchte daher obigen Rechnungsvorgang nur als ein ***Orientirungsmittel*** angesehen wissen, welches die passende Normalform und alle ihre Lösungen aus ***einer*** Quelle ableiten lässt. Nachträglich aber erweist man die Allgemeingültigkeit der Integrale direct, indem man sie in die Normalform (11.) einführt. In der That ergeben sich nach einer selbstverständlichen Buchstabenvertauschung die bekannten *Gauss*schen Beziehungen zwischen

$$F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2),\ F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1),\ F(\alpha, \beta, \gamma)$$

oder

$$F(\alpha, \beta, \gamma-1), \qquad F(\alpha, \beta, \gamma), \qquad F(\alpha, \beta, \gamma+1)$$

oder

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma), \qquad F(\alpha, \beta, \gamma), \qquad F(\alpha-1, \beta, \gamma),$$

je nachdem man entweder die Lösungen $y_1^{(h)}$ und $y_2^{(h)}$ oder $y_3^{(h)}$ und $y_4^{(h)}$ oder $y_5^{(h)}$ und $y_6^{(h)}$ einträgt.

Was nun die Transformation der Gleichung (9.) in die Normalform (11.) anlangt, so genügt hierzu die Substitution

$$(13.)\qquad z^{(h)} = \varrho^h \cdot y^{(h)},$$

wobei ϱ eine disponible Constante bezeichnet; die sonstigen Umformungen liegen auf der Hand. Die Gleichung (10.) führt man zunächst auf (9.) zurück; die vermittelnde Substitution unterscheidet sich von (13.) nur da-

durch, dass eine Gammafunction als Factor hinzutritt. Wegen der weiteren Details vergleiche a. a. O.

Will man sämmtliche 24 Integralformen haben, die ***Kummer*** in der genannten Abhandlung aufgestellt hat, so braucht man die sechs Integrale unter No. 12 nur mittels der Identität

$$(14.) \qquad F(a, b, c, x) = (1-x)^{c-a-b} \cdot F(c-a, c-b, c, x)$$

umzuformen; auf die nun vorhandenen zwölf Integrale wende man dann die bekannte Transformationsformel

$$(15.) \qquad F(a, b, c, x) = (1-x)^{-a} \cdot F\left(a, c-b, c, \frac{x}{x-1}\right)$$

an. Auf diese Weise bekommt man für jeden nur denkbaren Fall passende Lösungen der vorgelegten Differenzengleichung, mag nun x grösser oder kleiner als die Einheit, h positiv oder negativ sein. Insbesondere wird man auch die Fälle leicht erkennen, in denen die Lösungen rational und überhaupt algebraisch werden.

Die bisher betrachteten Differenzengleichungen sind nicht die einzigen, welche sich mittels der Function F integriren lassen. Setzt man allgemein

$$(16.) \qquad y_h = F(\alpha+mh, \beta+nh, \gamma+ph, x),$$

unter m, n, p ganze Zahlen verstanden, so besteht zwischen y_h, y_{h+1} und y_{h+2} eine lineare homogene Beziehung, welche nach den von ***Gauss*** gegebenen Principien zu entwickeln ist und bezüglich y_h eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung vorstellt, deren Coefficienten jedoch den zweiten Grad übersteigen. Es existirt ausserdem auch ein Fall, wo m und n gebrochen sein dürfen. Ist nämlich

$$m = n = \frac{1}{2} \text{ und } \beta = \alpha+\frac{1}{2},$$

und setzt man

$$(17.) \qquad y_h = F\left(\alpha+\frac{h}{2}, \alpha+\frac{h}{2}+\frac{1}{2}, \gamma+ph, x\right),$$

so wird

$$y_{h+1} = F\left(\alpha+\frac{h}{2}+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{h}{2}+1, \gamma+ph+p, x\right),$$

$$y_{h+2} = F\left(\alpha+\frac{h}{2}+1, \alpha+\frac{h}{2}+\frac{3}{2}, \gamma+ph+2p, x\right),$$

und bezeichnet man die erste Function kurz durch $F(a, b, c)$, so lauten die nächsten beiden mit Rücksicht auf die Vertauschbarkeit von a und b:

$$F(a+1, b, c+p) \quad \text{und} \quad F(a+1, b+1, c+2p).$$

Mithin lässt sich zwischen jenen drei Functionen eine lineare homogene Beziehung aufstellen. Der Bruch $\frac{1}{2}$ ist für die hypergeometrischen Functionen *zweiter* Ordnung charakteristisch; bei den Functionen n-ter Ordnung tritt entsprechend $\frac{1}{n}$ auf. Erwähnt sei, dass die betreffenden Functionen bei der Auflösung der quadrinomischen Gleichungen, z. B. der *Jacobi*schen Gleichung vierten und sechsten Grades eine Rolle spielen, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe.*)

Es ist weiterhin einleuchtend, dass das von uns eingeschlagene Verfahren zur Bildung von Differenzengleichungen unmittelbar auf solche Gleichungen ausgedehnt werden kann, denen hypergeometrische Functionen *dritter* und *höherer* Ordnung genügen. Sind die Gleichungen *nicht* homogen, besteht also ihre rechte Seite in einer gegebenen Function von h, so ist dem Integral der homogenen Gleichung ein additives Glied anzuhängen, das sogenannte ***Supplementintegral***, welches als particuläres Integral der *nicht* homogenen Gleichung auf besondere Weise bestimmt wird. Bei diesen Untersuchungen erweisen sich die von *Euler* gefundenen, von *Kummer* präciser dargestellten bestimmten Integrale für die Function F als sehr zweckmässig. Man vergl. die ausführlichere Darstellung in den genannten „Studien", sowie die Abhandlung des Verfassers „Ueber Supplementintegrale", dieses Journal, Bd. 98.

Von linearen simultanen Differenzengleichungen sei hier nur so viel erwähnt, dass die Integration des Systems

$$(18.)\qquad \begin{cases} y^{(h+1)}+(a_1+b_1h)y^{(h)}+(c_1+d_1h)z^{(h)} = 0, \\ z^{(h+1)}+(a_2+b_2h)y^{(h)}+(c_2+d_2h)z^{(h)} = 0 \end{cases}$$

zur Gleichung (9.) hinführt. Die betreffende Transformation hat Verfasser in weit allgemeinerer Weise in einer Abhandlung „Zur Theorie der Differenzengleichungen", dieses Journal Bd. 109 mitgetheilt. Wenn übrigens die Gleichungen so speciell sind, wie unter No. 18, so lassen sie sich auch unmittelbar in ein ***Normalsystem*** umgestalten, so dass nach Elimination von $z^{(h)}$ und $z^{(h+1)}$ sogleich die fertige Normalform (11.) erscheint. Es giebt aber noch eine Transformation des Systems (18.), die uns besonders wegen einer

*) Ueber hypergeometrische Functionen, deren letztes Element speciell ist. — Zeitschr. f. Math. u. Phys., 44. Jahrg.

dabei auftretenden Resolvente interessirt, welche letztere im Gebiete der Differenzengleichung eine ähnliche Rolle spielt, wie die *Riccati*sche Gleichung unter den Differentialgleichungen. Setzt man nämlich

(19.) $$y_h : z_h = -\Theta_h,$$

so entsteht

(20.) $$(a_2+b_2h)\Theta_{h+1}\cdot\Theta_h-(c_2+d_2h)\Theta_{h+1}+(a_1+b_1h)\Theta_h-(c_1+d_1h)=0,$$

und diese Gleichung muss nun selbstverständlich eine Reduction auf die früher angegebenen Differenzengleichungen *zweiter* Ordnung (9.) resp. (11.) zulassen. Die Gleichung (20.) ist aber nicht die einzige ihrer Art, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden kann; es gilt dies vielmehr auch dann noch, wenn in einer Gleichung der Form

(21.) $$p_2\Theta_{u+1}\Theta_u-q_2\Theta_{u+1}+p_1\Theta_u-q_1=0$$

die Coefficienten p, q bezüglich u folgendermassen beschaffen sind:

$\alpha)$ p_2 constant, q_2 und p_1 linear, q_1 quadratisch,

$\beta)$ p_2 quadratisch, q_2 und p_1 linear, q_1 constant,

$\gamma)$ p_2, q_2, p_1, q_1 sämmtlich linear.

Der erste dieser Fälle erledigt sich durch die Substitution

(22.) $$\Theta_u=\vartheta_u+\frac{q_2}{p_2},$$

denn es entsteht

(23.) $$A\vartheta_{u+1}\vartheta_u+(B+Cu)\vartheta_u+(D+Eu+Fu^2)=0,$$

und für

(24.) $$\vartheta_u=\frac{z_{u+1}}{z_u},\quad \vartheta_{u+1}\vartheta_u=\frac{z_{u+2}}{z_u}$$

ergiebt sich

(25.) $$Az_{u+2}+(B+Cu)z_{u+1}+(D+Eu+Fu^2)z_u=0,$$

welche Gleichung genau wie (9.) beschaffen ist.

Der zweite Fall geht aus dem ersten durch die Substitution

(26.) $$\Theta_u=\frac{1}{\Omega_u}$$

hervor.

Der dritte Fall kommt auf den zweiten zurück, wenn man in die ursprüngliche Gleichung (21.) gleich anfangs die Substitution

(27.) $$\Theta_u=\Omega_u+\lambda$$

einführt und über die Constante λ so verfügt, dass der Coefficient von u in q_1 verschwindet.

Was nun die Gleichung (21.) so wichtig macht, ist der Umstand, dass sie zur Bildung sehr allgemeiner ***Kettenbrüche*** Anlass giebt. Der Ansatz hierzu liegt unmittelbar in der Bruchform

$$(28.) \qquad \Theta_{u+1} = -\frac{p_1 \Theta_u - q_1}{p_2 \Theta_u - q_2}, \text{ resp. } \Theta_u = \frac{q_2 \Theta_{u+1} + q_1}{p_2 \Theta_{u+1} + p_1},$$

wobei die Specialfälle $p_1 = 0$ oder $q_2 = 0$ als besonders einfach hervortreten. Die nach Maassgabe der Recursionsformeln (28.) entwickelten Kettenbrüche kommen demnach im wesentlichen mit dem Quotienten aus zwei benachbarten hypergeometrischen Functionen überein und finden so Anschluss an ein wohldurchforschtes Gebiet.*) Thatsächlich bedarf es nur der kleinen Mühe, dass man die vier Elemente der hypergeometrischen Function explicite durch die Constanten der Gleichung (21.) ausdrückt. Noch vortheilhafter ist es vielleicht, wenn man die Normalform (11.) mit der Substitution

$$(29.) \qquad y_{h+1} : y_h = \vartheta_h$$

verbindet und dadurch auch für die verschiedenen Fälle der Gleichung (21.) eine zweckmässige Normalform herstellt.

Bekanntlich hat ***Gauss*** verschiedene Kettenbrüche angegeben, die durch den Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen ersetzt werden können und mit letzteren gleichzeitig convergiren. Aus unserer Darstellung geht hervor, dass sich jene Untersuchungen weiter fortsetzen lassen, wenn man bei irgend einer der zahlreichen Differenzengleichungen, die hier in Frage kommen können, anknüpft.

*) Herr ***L. Saalschütz*** hat in einer Arbeit „Ueber rationale Auflösungen der Functionalgleichung $C\psi(n)\psi(n+1)+(A''n+B'')\psi(n+1)-(A'(n+1)+B')\psi(n)+(A'-A'')=0$“, welche die Vorbereitung zu einem umfangreichen Aufsatz über Kettenbrüche bildet, vergl. dieses Journal, Bd. 119 und 120, die eben genannte Differenzengleichung, welche offenbar auf einen Specialfall der Gleichung (20.) hinauskommt, dadurch zu integriren versucht, dass er eine rationale gebrochene Function mit unbestimmten Coefficienten hypothetisch ansetzt. Obgleich nun der Herr Verfasser ganz seine eigenen Wege geht, so liegt es doch in der Natur der Aufgabe, dass das Endresultat nichts anderes sein kann, als der Quotient zweier hypergeometrischen Reihen, welche letztere rational werden, resp. abbrechen, sobald eines der beiden ersten Elemente eine ganze negative Zahl vorstellt. Herr ***Saalschütz*** hat dies auch in einer Randnote seiner Arbeit (Bd. 120 S. 162) bestätigt, aber die Bemerkung beigefügt, dass meine Methode in gewissen Fällen nur formales Interesse darböte, da die Reihen zuweilen divergent sein könnten. — Hierzu möchte ich bemerken, dass ein solcher Fall ***niemals*** eintreten kann. Eben weil wir die Auflösung der Gleichung (20.) auf die Normalform der hypergeometrischen Differenzengleichungen zurückführen, so stehen uns sämmtliche Integralformen von ***Kummer*** zu Gebote, von denen bekanntlich immer ein Paar ***brauchbare convergente*** und — wenn überhaupt möglich — abbrechende Reihen liefert.

Ueber die Reduction einer quadratischen Function.

(Von Herrn *H. E. Timerding* in Strassburg.)

Die homogenen quadratischen Functionen sind seit *Jacobi,* zuletzt noch durch Herrn *Frobenius,* auf das Ausführlichste behandelt worden, und ihnen gegenüber sind die nicht homogenen Functionen vollständig zurückgetreten. So wenig sich gegen die Unterordnung der letzteren gegenüber den ersteren auch einwenden lässt, so dürfte es doch nicht ohne Interesse sein, ein Problem kurz zu behandeln, das allein die nicht homogenen quadratischen Functionen betrifft und der Theorie der homogenen Functionen fremd ist. Dasselbe ist vollkommen analog der Reduction der in gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten gegebenen Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung auf eine möglichst einfache Form durch ihre Beziehung auf ein anderes Cartesisches System.

Wir bedienen uns der folgenden ***Bezeichnungen und Benennungen:***

1. Mit $f((x))$ soll irgend eine quadratische Function, mit $\varphi((x))$ eine homogene Function zweiten Grades der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet werden, ebenso mit $l((x))$ eine lineare homogene Function derselben. Dann lässt sich in Zeichen schreiben

$$f((x)) = \varphi((x)) + 2l((x)) + a,$$

wenn a eine Constante bedeutet. n heisse die Dimension der Function.

2. Irgend eine Combination bestimmter Werthe der n Veränderlichen nennen wir einen Punkt und bezeichnen ihn durch den Buchstaben seiner Coordinaten, d. h. der Werthe der Veränderlichen, denen er entspricht, mit fortgelassenem Index. Die Gesammtheit der allen möglichen Combinationen der Veränderlichen entsprechenden Punkte wollen wir kurz als Raum, und zwar als n-dimensionalen Raum, bezeichnen. Die Punkte, die allen linearen Zusammensetzungen

$$x_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{p+1} \lambda^{(\varrho)} x_\sigma^{(\varrho)}, \quad \text{für} \sum_{\varrho=1}^{p+1} \lambda^{(\varrho)} = 1, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

der Coordinaten von $p+1$ Punkten $x^{(\varrho)}$ entsprechen, erfüllen eine lineare Mannigfaltigkeit von p Dimensionen oder kurz gesagt, ein *Lineare* von p Dimensionen. Ein solches ist auch durch $n-p$ beliebige lineare Gleichungen zwischen den Veränderlichen gegeben, oder auch lassen sich die Coordinaten der Punkte dieses Lineare in der Form darstellen:

$$x_\sigma = x_\sigma^{(0)} + \sum_{\varrho=1}^{p} \alpha_\sigma^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

dann kann man die $\xi^{(\varrho)}$ als Coordinaten der Punkte in dem Lineare ansehen.

3. Als Determinante Δ einer quadratischen Function wird bekanntlich die Determinante aus ihren Coefficienten bezeichnet, die so gebildet ist, dass in der Hauptdiagonale die Coefficienten der Quadrate der Veränderlichen und das constante Glied stehen, und sonst im Durchschnitt der p-ten Reihe mit der q-ten Spalte der halbe Coefficient von $x_p x_q$ und in der letzten Reihe oder letzten Spalte an s-ter Stelle der halbe Coefficient von x_s steht.

Discriminante der quadratischen Function nennen wir die Determinante D ihres homogenen quadratischen Theiles.

Als anreihende Hauptminoren bezeichnen wir eine solche Kette von Hauptunterdeterminanten der Determinante Δ, deren jede aus der vorhergehenden durch Hinzufügung einer Reihe und Spalte hervorgeht.

4. Eine quadratische Function soll r-fach konisch heissen, wenn sie für alle Punkte eines Lineare von $r-1$ Dimensionen mitsammt ihren Derivirten verschwindet. Dieses Lineare wollen wir das Doppellineare der quadratischen Function nennen. Die letztere verschwindet dann für alle Punkte von $(n-r-1)$-fach unendlich vielen Linearia von r Dimensionen, die alle das Doppellineare enthalten.

Es gelten nun zunächst die folgenden vier Sätze, die hier angereiht werden mögen, da sie für das Folgende von Nutzen sind. Sie sind zum Theil wohl bekannt.

Erster Satz. Damit eine quadratische Function r-fach konisch sei, muss ihre Determinante mit allen Unterdeterminanten bis zu den $(r-1)$-ten inclusive verschwinden.

Zweiter Satz. Die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit eine quadratische Function r-fach konisch sei, ist unabhängig von der Dimension der Function, und zwar beträgt sie

$$\frac{r(r+1)}{2}.$$

Das heisst, damit eine $(r-1)$-fach konische Function auch r-fach konisch sei, sind noch r Bedingungen zu erfüllen.

Eine r-fach konische Function ist nämlich vollständig bestimmt, wenn man ihr Doppellineare und in einem Lineare von $n-r$ Dimensionen eine quadratische Function annimmt. Die Anzahl der unabhängigen Constanten, die sie enthält, ist also

$$(n-r+1)r+\frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2}$$

oder

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{r(r+1)}{2}.$$

Das erste Glied in diesem Ausdrucke ist aber die Anzahl der in der allgemeinen quadratischen Function von n Veränderlichen enthaltenen Constanten.

Dritter Satz. Wenn in der Determinante Δ irgend eine Hauptunterdeterminante mit allen s-ten Minoren verschwindet, so verschwinden beliebige s Hauptunterdeterminanten, welche an die erstere anreihen, und zwar die r-te mit allen $(s-r)$-ten Unterdeterminanten, so dass im Ganzen eine Reihe von $2s+1$ anreihenden Hauptminoren verschwindet, die mittelste mit allen s-ten Minoren und die von dieser nach oben oder unten um r Stellen entfernte mit allen $(s-r)$-ten Minoren.

Vierter Satz. Wenn drei anreihende Hauptminoren verschwinden, so verschwinden von der mittleren i. A. alle ersten Unterdeterminanten.

Dieser Satz erscheint als eine Verbindung des zweiten mit dem dritten, wenn man in diesem $s=1$ und in jenem $r=2$ setzt.

Definition. Eine Punkttransformation des n-dimensionalen Raumes, die durch n lineare Substitutionsgleichungen bestimmt ist, soll eine orthogonale heissen, wenn sie den Differentialausdruck Σdx_μ^2 identisch in sich transformirt. Wir stellen uns nun die

Aufgabe: Eine quadratische Function durch eine orthogonale Transformation auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Sei die quadratische Function

$$f((x)) = \sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\mu x_\nu + 2\sum_\mu a_\mu x_\mu + a,$$

so versuchen wir zunächst durch die Substitutionen

$$(s) \qquad x'_\varrho = x_\varrho + x_\varrho^{(0)}, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

die linearen Glieder wegzuschaffen. Es ergiebt sich dann, dass die Grössen $x_\varrho^{(0)}$ den n Gleichungen genügen müssen

$$\text{(m)} \qquad \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu^{(0)} = a_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn die Determinante dieser Gleichungen, nämlich die Discriminante D der quadratischen Function, nicht verschwindet, so ergeben die Gleichungen (m) ein einziges, vollkommen bestimmtes Werthsystem $x_\varrho^{(0)}$. Nennen wir den diesem Werthsystem entsprechenden Punkt einen Mittelpunkt für die quadratische Function, so ist also immer ein einziger Mittelpunkt vorhanden, solange die Discriminante D von Null verschieden ist.

Ist $D = 0$, und damit beginnt die eigentliche Discussion des Problems, so sind unter den Gleichungen (m) entweder widersprechende oder überzählige oder beides enthalten, und zwar haben wir folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Ist $\Delta \neq 0$, so sind die Gleichungen (m) unvereinbar, es giebt keinen Mittelpunkt.

2. Ist $\Delta = 0$, so kann man dem Gleichungssystem (m) immer noch die Gleichung

$$\sum_\nu a_\nu x_\nu^{(0)} = a$$

hinzufügen, der durch jede Lösung jenes Systems genügt wird. Nehmen wir jetzt an, es seien p überzählige unter den n Gleichungen (m). Dann verschwinden alle p-ten Unterdeterminanten von Δ. Schliessen wir nun von den n Gleichungen (m) etwa die i_1-te, i_2-te, …, i_p-te als überzählig aus, so ist in den übrigen $n-p$ Gleichungen ein Widerspruch enthalten, wenn alle $(n-p)$-reihigen Determinanten verschwinden, die man aus den links stehenden Coefficienten als Matrix bilden kann. Das heisst aber, wenn ein Widerspruch in den Gleichungen enthalten sein soll, müssen von der Discriminante auch die p-ten Unterdeterminanten verschwinden und nicht bloss die $(p-1)$-ten, wie aus dem Umstande, dass von der Determinante Δ alle p-ten Minoren Null sind, folgen würde.

Aber trotzdem kann es doch möglich sein, durch Substitutionen von der Form (s) die linearen Glieder aus dem Ausdruck der quadratischen Function zu entfernen. Um zu erkennen, ob dies der Fall ist, setzen wir

$$x_{i_1} = x_{i_1}^{(0)}, \quad x_{i_2} = x_{i_2}^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_{i_p} = x_{i_p}^{(0)}, \quad x_{i_{p+1}} = x_{i_{p+1}}^{(0)},$$

dann behalten wir statt der ursprünglichen Function eine Function von nur $n-p-1$ Variablen übrig. Ist für diese die in Rede stehende Reduction möglich,

so ist sie es auch für die ursprüngliche Function von n Variablen*), und zwar kann, weil über die Constanten $x_{i_\mu}^{(0)}$ beliebig disponirt werden darf, der den Constanten in den Substitutionsgleichungen entsprechende Punkt, der auch hier noch Mittelpunkt heissen möge, in einem Lineare von $p+1$ Dimensionen beliebig angenommen werden. Damit jene Reduction für die quadratische Function von $n-p-1$ Variablen aber möglich sei, ist notwendig, dass von der Discriminante D nicht noch die $(p+1)$-ten Minoren verschwinden.

Wir wollen dieses Verfahren an den einfachsten Fällen erläutern, wo von Δ nicht alle ersten Unterdeterminanten verschwinden.

a) Ist $\Delta = 0$, $D = 0$, aber $D' = \frac{\partial D}{\partial a_{nn}} \neq 0$, so ist in den Gleichungen wohl ein Widerspruch, aber setzen wir $x_\mu = x_\mu^{(0)}$, so finden wir für diese Function von der Dimension $n-1$ einen bestimmten Mittelpunkt, und indem wir den Coordinaten dieses Mittelpunktes den Werth $x_\mu^{(0)}$ hinzufügen, einfach unendlich viele Mittelpunkte für die Function f, als lineare Functionen der einen Coordinate $x_\mu^{(0)}$.

b) Ist $\Delta = 0$, $D = 0$ und $D' = 0$, so existirt kein Mittelpunkt. Denn setzen wir in dem Ausdrucke der quadratischen Function $x_\mu = 0$ und wollen für diese Function von der Dimension $n-1$ die in Rede stehende Trans-

*) Verschwindet nämlich die Function für einen Punkt x_μ, so verschwindet sie auch für jeden Punkt

$$x_\mu + \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_\mu^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)},$$

wo die $\xi^{(\varrho)}$ ganz beliebige Grössen sind. Verschwindet also unter der Voraussetzung

$$x_{i_\sigma} = x_{i_\sigma}^{(0)}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, p+1)$$

die Function für den Punkt $(x_\mu^{(0)} + x_\mu)$, wenn sie für $(x_\mu^{(0)} - x_\mu)$ Null ist, so verschwindet sie auch allemal für den Punkt

$$x_\mu^{(0)} + x_\mu + \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_\mu^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)},$$

wenn sie für

$$x_\mu^{(0)} - x_\mu - \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_\mu^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)}$$

Null ist, indem wir das zweite Mal die Vorzeichen der willkürlichen Grössen $\xi^{(\varrho)}$ verändern. Diese $p+1$ Grössen $\xi^{(\varrho)}$ lassen sich aber so bestimmen, dass die Coordinaten

$$x_{i_\sigma} + \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_{i_\sigma}^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, p+1)$$

beliebige Werthe annehmen, so dass allgemein, wenn die Function für einen Punkt $(x_\mu^{(0)} - x_\mu)$ Null wird, sie auch für $(x_\mu^{(0)} + x_\mu)$ verschwindet, w. z. b. w.

formation ausführen, so verschwindet die Discriminante, ohne dass die Determinante Null wird, die Transformation ist also sicher unmöglich.

Nach dem Vorhergehenden haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall. Die Gleichungen (m) enthalten keine Widersprüche und die Transformation durch die Gleichungen (s) ist möglich. Dann kann die Function in beliebigem Grade konisch sein.

Zweiter Fall. Die Gleichungen (m) enthalten Widersprüche, aber die Transformation ist trotzdem möglich. Wenn dann die Determinante Δ und die Discriminante D mit allen $(p-1)$-ten Minoren verschwinden und der Mittelpunkt in einem Lineare von p Dimensionen beliebig angenommen werden kann, so können wir die Function r-fach cylindrisch nennen.

Dritter Fall. Die Gleichungen (m) enthalten Widersprüche und die Transformation ist unmöglich. Dann kann man die quadratische Function als p-fach parabolisch bezeichnen, wenn in ihrer Determinante alle $(p-2)$-ten Minoren verschwinden und in ihrer Discriminante alle $(p-1)$-ten Unterdeterminanten.

Wir benutzen nun das bekannte Theorem: Jede homogene quadratische Function lässt sich durch eine orthogonale Substitution auf eine Form bringen, die nur die Quadrate der Veränderlichen enthält, und zwar fehlen in dieser Form p Veränderliche, wenn die Function p-fach konisch ist.

Dann geben die folgenden Sätze die Reduction einer beliebigen quadratischen Function auf ihre einfachste Form durch eine orthogonale Transformation.

Fünfter Satz. Wenn die Determinante und die Discriminante einer quadratischen Function f von Null verschieden sind, so kann man dieselbe durch eine bestimmte orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_{1}^{n} G_\mu x_\mu^2 + G.$$

Sechster Satz. Wenn die Determinante mit allen p-ten Minoren verschwindet, ohne dass von der Discriminante alle p-ten Minoren Null sind, so kann man die quadratische Function durch eine orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_{1}^{n-p} G_\mu x_\mu^2.$$

Siebenter Satz. Wenn die Determinante und die Discriminante mit allen p-ten Unterdeterminanten verschwinden, so lässt sich die quadratische

Function immer durch eine orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_{1}^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2 + G.$$

Zunächst nämlich lässt sie sich auf die Form bringen

$$f = \varphi((x)) + G,$$

und hierin ist $\varphi((x))$ $(p+1)$-fach konisch.

Achter Satz. Verschwindet die Discriminante einer quadratischen Function mit allen p-ten Unterdeterminanten, so verschwindet nothwendig die Determinante mit allen $(p-1)$-ten Minoren. Sind aber nicht auch alle ihre p-ten Minoren Null, so lässt sich die quadratische Function immer durch eine orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_{1}^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2 + 2 G_{n-p} x_{n-p}.$$

Denn zunächst lässt sie sich auf die Form bringen

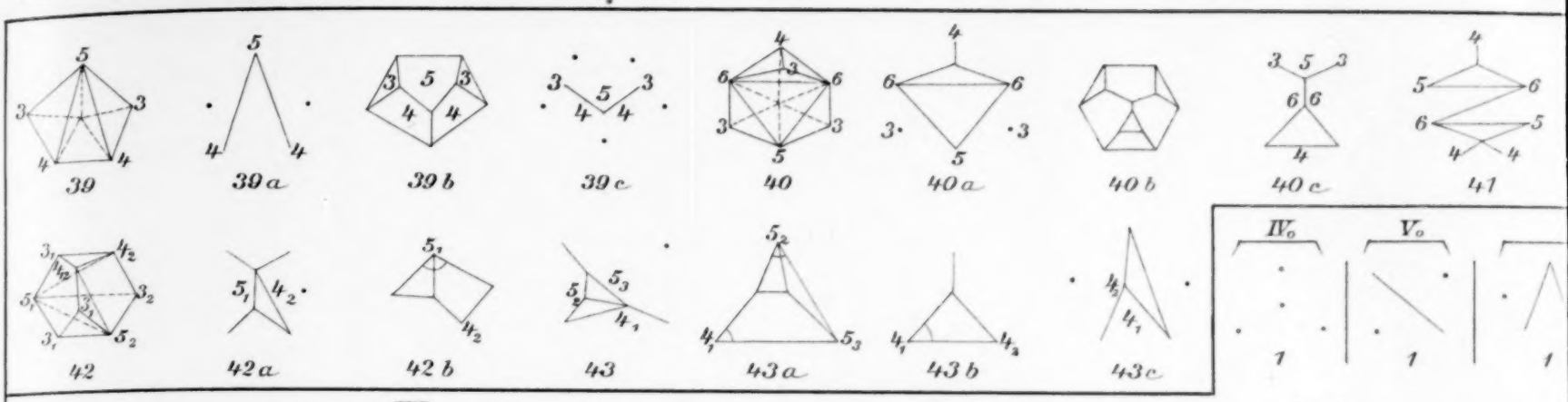
$$f = \sum_{1}^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2 + 2l((x)) + a,$$

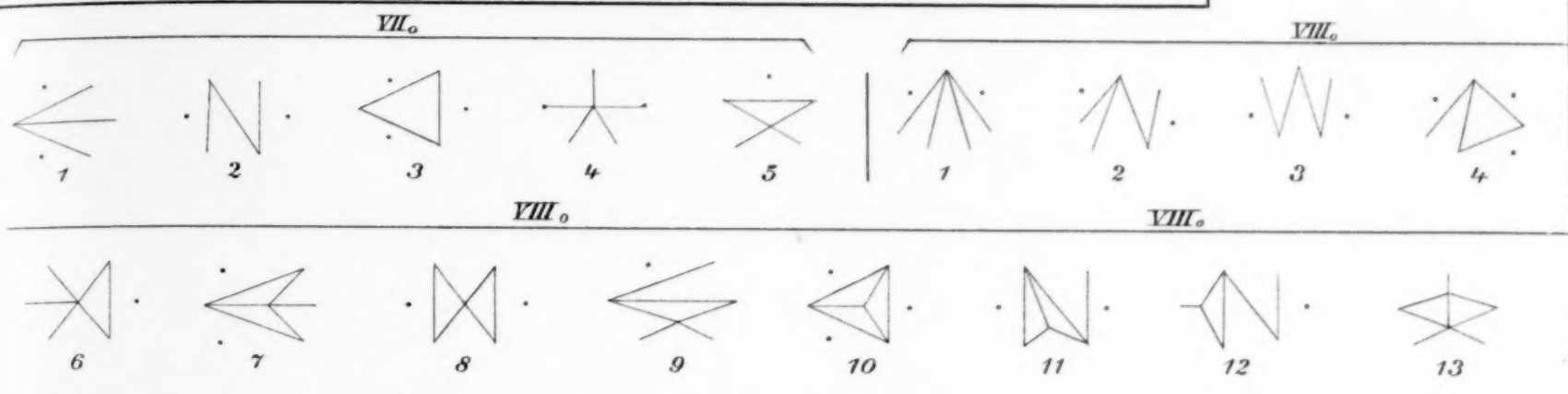
aus der linearen Function $2l((x))+a$ lassen sich aber durch eine Substitution von der Form

$$x'_\mu = x_\mu + x_\mu^{(0)}, \text{ wo } x_\mu^{(0)} = 0 \text{ für } \mu \geqq n-p,$$

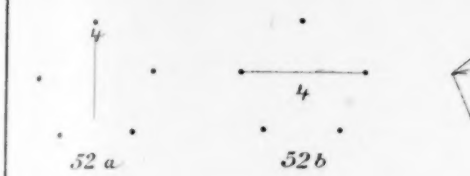
noch $n-p-1$ Glieder ausscheiden, und der übrige aus $p+2$ Gliedern bestehende Theil lässt sich durch eine orthogonale Substitution für die allein in ihm enthaltenen $s+1$ Variablen auf die einfache Form $2G_{n-p}x_{n-p}$ reduciren.

Für den besonderen Fall $n = 3$ liefern diese Sätze die bekannte Discussion und Reduction der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Cartesischen Coordinaten, wie sie in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes gegeben wird.

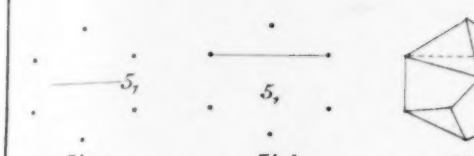




Graph. Kunstdruckerei Rich. Fuchs, Berlin, SW.

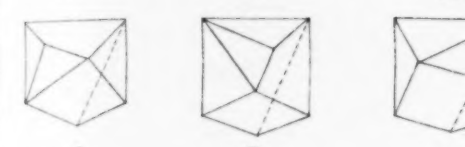


52 a 52 b

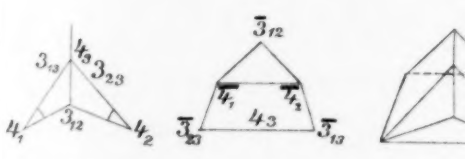


54 a 54 b 54

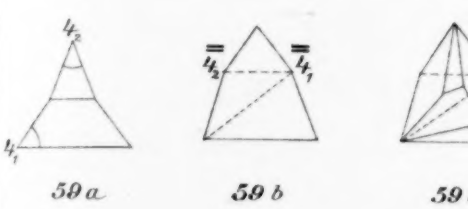
55 55 55



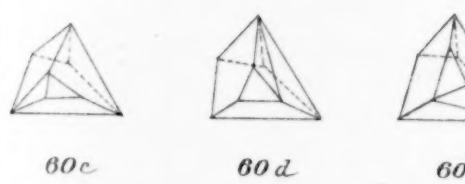
A B C



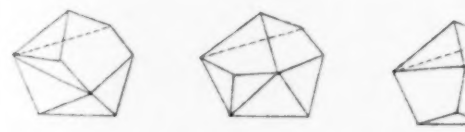
56 c 56 d 56



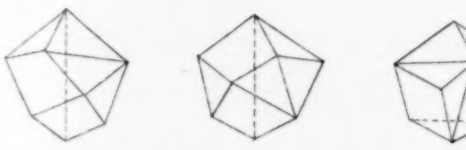
59 a 59 b 59



60 c 60 d 60

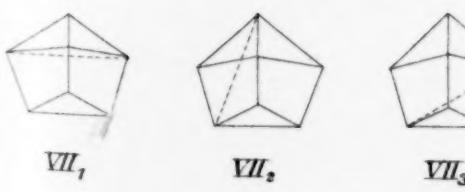


61 e 61 f 61

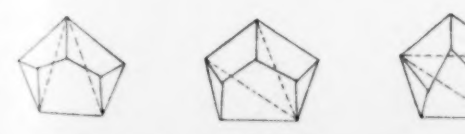


62 b 62 c 63

67 a 67 b 67



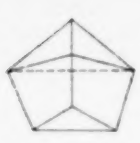
VII_1 VII_2 VII_3

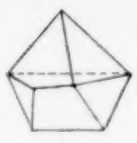


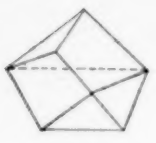
VIII_6 VIII_7 VIII

Graph. Kunstdruckerei Rich. Fuchs, Berlin, S

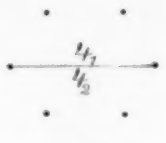
52b

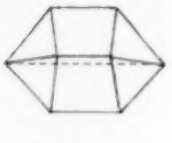

52c

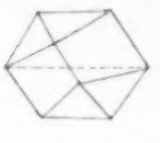

52d


52e

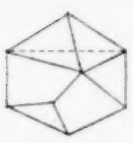
53a

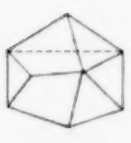

53b


53c


53d

b

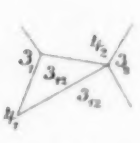

54c

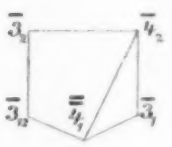

54d

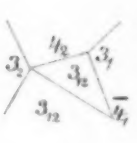
54e

55a

55b


55c


55d


55e

55

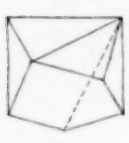
55

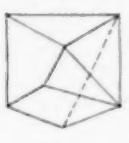
55

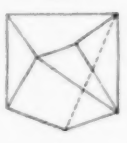
55

55

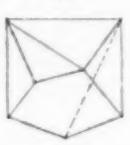
55

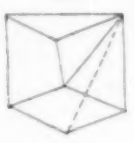

C


D

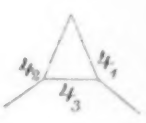

E

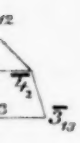
F

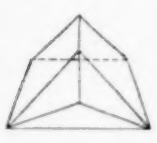

G


H

56a


56b


d


56e

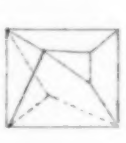
56f

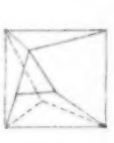
57a

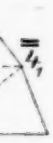
57b

57c

57d


58a


58b


b

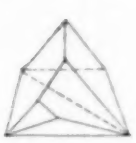
59c

59d

59e

59f

59g


59h

60a

60b

d

60e

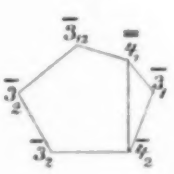
60f

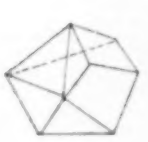
60g

60h

61a

61b


61c


61d

f

61g

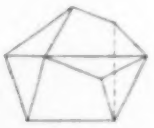
61h

61i

61k

61l

61m


61n

62a

2c

63a

63b

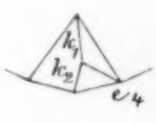
64a

65

65a

65b

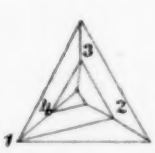
65c

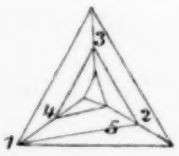

66

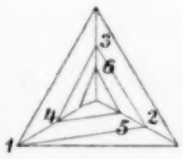
b

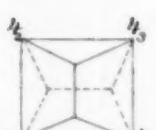
67c

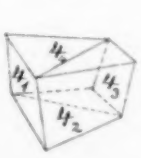
67d

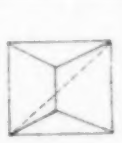

67e


67f

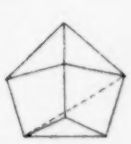

67g

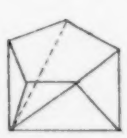

68a

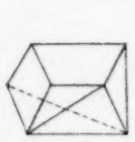

68b


VI_1

VII_2


VII_3


VII_4

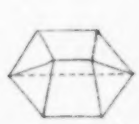

VII_5

VIII_1

VIII_2

VIII_3

VIII_4


VIII_5

VIII_7

VIII_8

VIII_9

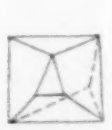
VIII_{10}

VIII_{11}

VIII_{12}

VIII_{13}

VIII_{14}


VIII_{15}

ch. Fuchs, Berlin, SW.

On certain determinant theorems.

(By Mr. *Nanson* in Melbourne.)

The present paper relates chiefly to some theorems discussed by *Netto* in this Journal t. CXIV, pp. 345—352. Most of these theorems are immediate corollaries from a law given by *Muir* in 1881.*) The law in question is an immediate consequence of *Jacobi*'s fundamental theorem relating to a minor of the adjugate of a determinant, but it is most simply found by the help of a theorem of *Kronecker*'s**), which may be stated as follows.

If two determinants

$$|a_{pq}|, \qquad |a'_{pq}| \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

be called reciprocal when

$$\sum_r a_{pr} a'_{rq} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

has the value 1 or 0 according as p is or is not equal to q, then any minor of a determinant is equal to the cofactor of the corresponding minor of the reciprocal determinant divided by the reciprocal determinant.

By the cofactor of a minor of a determinant I mean the coefficient of that minor in the expansion of the determinant by *Laplace*'s theorem. By the word minor I mean the determinant formed by the elements, maintaining their relative position, common to certain rows and columns. I give these explanations because some writers say minor when they mean cofactor.

From this theorem of *Kronecker*'s it immediaty follows that in any general theorem relating to the minors of a determinant, each minor which occurs may be replaced by its cofactor divided by the determinant. Thus we have the following theorem.

*) Trans. R. S. Edin. XXX, pp. 1—4.

**) Sitzungsberichte d. k. Akad. d. Wiss. Berlin 1882, pp. 821—824.

In any general homogeneous relation between the minors of a determinant each minor which occurs may be replaced by its cofactor provided the result so obtained is made homogeneous by multiplying each term by the proper power of the original determinant.

This theorem was enunciated by ***Muir*** in 1881 as the „Law of complementaries".

In the application of this theorem the original determinant and its elements may be regarded as minors. Thus a complementary theorem may be formed in more than one way. But one of the complementaries of a complentary is the original theorem.

If Θ, Φ denote two sets of k numbers chosen from 1, 2, ..., n then the minor formed with the rows Θ and the columns Φ of the determinant δ, where

$$\delta = |a_{pq}| \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

may be denoted by

$$|a_{\Theta\Phi}|$$

and the complementary minor by

$$|a_{\Theta'\Phi'}|,$$

where Θ', Φ' are the sets of $n-k$ numbers complementary to Θ, Φ respectively. The cofactor of $|a_{\Theta\Phi}|$ is $\varepsilon\,|a_{\Theta'\Phi'}|$ where ε has the value $+1$ or -1 according as the sum of the numbers in the sets Θ, Φ, or the sum of the numbers in the sets Θ', Φ' is even or odd.

The rule for forming the complementary of a given theorem with respect to the determinant δ is to replace each minor $|a_{\Theta\Phi}|$ of δ which occurs by $\delta^{-1}\varepsilon|a_{\Theta'\Phi'}|$. If then we wish to form, with respect to δ a complementary of the complementary, we may replace $|a_{\Theta'\Phi'}|$ by $\delta^{-1}\varepsilon|a_{\Theta\Phi}|$, δ by δ^{-1} and therefore $\delta^{-1}\varepsilon|a_{\Theta'\Phi'}|$ by $|a_{\Theta\Phi}|$. Thus, as already stated, a complementary, with respect to δ, of a complementary, with respect to δ, is the original theorem.

Now the original determinant δ and all its minors are minors of the extended determinant Δ, where

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_{pq}) & (a_{py}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix}$$

$$(p, q = 1, 2, \ldots, n; \quad x, y = n+1, n+2, \ldots, n+p)$$

and (a_{pq}), (a_{py}), (a_{xq}), (a_{xy}) denote arrays. We may therefore form the complementary, with respect to δ. To do this we replace

$$|a_{\Theta\cdot\Phi\cdot}| \quad \text{by} \quad \Delta^{-1}\varepsilon \begin{vmatrix} (a_{\Theta\Phi}) & (a_{\Theta y}) \\ (a_{x\Phi}) & (a_{xy}) \end{vmatrix},$$

$$\delta \quad \text{by} \quad \Delta^{-1}|a_{xy}|$$

and

$$\delta^{-1}\varepsilon|a_{\Theta\cdot\Phi\cdot}| \quad \text{by} \quad \frac{1}{|a_{xy}|}\begin{vmatrix} (a_{\Theta\Phi}) & (a_{\Theta y}) \\ (a_{x\Phi}) & (a_{xy}) \end{vmatrix}.$$

Thus we have the following theorem.

Given any homogeneous relation connecting the minors of a determinant, a new relation called the Extensional can be formed by replacing each minor $|a_{\Theta\Phi}|$ ***which occurs by***

$$\begin{vmatrix} (a_{\Theta\Phi}) & (a_{\Theta y}) \\ (a_{x\Phi}) & (a_{xy}) \end{vmatrix}$$

provided the result so obtained is made homogeneous by multiplying each term by the proper power of $|a_{xy}|$.

This theorem was given by *Muir* in 1881, l. c. as the „Law of Extensible Minors".

In illustration of these two theorems of *Muir* take first the identity

$$|a_{pq}| = |a_{pq}|.$$

A complementary is found by replacing $|a_{pq}|$ on the left by its cofactor unity and a_{pq} in the determinant on the right by its cofactor, A_{pq} say, and making the result homogeneous. Thus we obtain

$$|a_{pq}|^{n-1} = |A_{pq}|,$$

the well known theorem of *Cauchy*.

An extensional is found by replacing

$$|a_{pq}| \quad \text{by} \quad \begin{vmatrix} (a_{pq}) & (a_{py}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix},$$

$$a_{pq} \quad \text{by} \quad \begin{vmatrix} a_{pq} & (a_{py}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix}$$

and then making the result homogeneous.

Thus if

$$b_{pq} = \begin{vmatrix} a_{pq} & (a_{py}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix},$$

then

$$|a_{xy}|^{n-1}\begin{vmatrix} (a_{pq}) & (a_{pq}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix} = |b_{pq}|.$$

This is a well known theorem of *Sylvester*'s which has been repeatedly proved in this Journal. It will be cited in the sequel as *Sylvester*'s first theorem.

As a second example take the *Laplace* expansion theorem

$$|a_{pq}| = \Sigma_{\Phi}\varepsilon\,|a_{\Theta\Phi}|\cdot|a_{\Theta'\Phi'}|$$

where Θ, Θ' are given complementary sets from $1, 2, \ldots, n$; Φ, Φ' are any complementary sets from $1, 2, \ldots, n$; Θ, Φ contain the same number of numbers; Σ denotes summation for all ways of selecting the set Φ; ε has the same meaning as before and $p, q = 1, 2, \ldots, n$.

This theorem is its own complementary, but its extensional is

$$|a_{xy}|\cdot\begin{vmatrix}(a_{pq}) & (a_{py})\\ (a_{xq}) & (a_{xy})\end{vmatrix} = \Sigma_{\Phi}\varepsilon\begin{vmatrix}(a_{\Theta\Phi}) & (a_{\Theta y})\\ (a_{x\Phi}) & (a_{xy})\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}(a_{\Theta'\Phi'}) & (a_{\Theta' y})\\ (a_{x\Phi'}) & (a_{xy})\end{vmatrix}.$$

This result is a somewhat remarkable one in the history of the subject. It was discovered by *Muir**) in 1879 and led him to the discovery of the law of complementaries and the law of extension. Subsequently the theorem was rediscovered by *van Velzer***) in 1884 and by *Netto*†) in 1894.

As a third example take the *Laplace* expansion in terms of ternary products of complementary minors, viz:

$$|a_{pq}| = \Sigma_{\Phi}\varepsilon\,|a_{\Theta_1\Phi_1}|\cdot|a_{\Theta_2\Phi_2}|\cdot|a_{\Theta_3\Phi_3}|$$

where $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ are given complementary sets from $1, 2, \ldots, n$; Φ_1, Φ_2, Φ_3 are any complementary sets from $1, 2, \ldots, n$; Θ_r, Φ_r contain the same number of numbers; Σ denotes summation for all ways of selecting the sets Φ_1, Φ_2 and $\varepsilon = \pm 1$.

A complementary of this theorem is

$$|\alpha_{pq}|^2 = \Sigma_{\Phi'}\varepsilon\,|\alpha_{\Theta'_1\Phi'_1}|\cdot|\alpha_{\Theta'_2\Phi'_2}|\cdot|\alpha_{\Theta'_3\Phi'_3}|$$

where Θ'_r, Φ'_r are the sets from $1, 2, \ldots, n$ complementary to Θ_r, Φ_r respectively. In this result we may write

$$\begin{vmatrix}(a_{\Theta_2\Phi_2}) & (a_{\Theta_2\Phi_3})\\ (a_{\Theta_3\Phi_2}) & (a_{\Theta_3\Phi_3})\end{vmatrix}$$

in place of $|\alpha_{\Theta'_1\Phi'_1}|$ and similar expressions for $|a_{\Theta'_2\Phi'_2}|$, $|a_{\Theta'_3\Phi'_3}|$.

---

*) Trans. R. S. Edin. XXIX. pp. 47—54.

**) American Journal of Math. VI. pp. 164—172.

†) This Journal CXIV. p. 347. Equation (6.).

An extensional of this case of *Laplace*'s theorem is

$$|a_{xy}|^2 \begin{vmatrix} (a_{pq}) & (a_{py}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix} = \Sigma_{\Phi} \varepsilon \begin{vmatrix} (a_{\Theta_1 \Phi_1}) & (a_{\Theta_1 y}) \\ (a_{x \Phi_1}) & (a_{xy}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a_{\Theta_2 \Phi_2}) & (a_{\Theta_2 y}) \\ (a_{x \Phi_2}) & (a_{xy}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a_{\Theta_3 \Phi_3}) & (a_{\Theta_3 y}) \\ (a_{x \Phi_3}) & (a_{xy}) \end{vmatrix}$$

and this is one of the theorems of *Netto**).

As a fourth example take the general case of *Laplace*'s theorem which with a notation similar to that already employed may be written

$$|a_{pq}| = \Sigma_{\Phi} \varepsilon |a_{\Theta_1 \Phi_1}| \, |a_{\Theta_2 \Phi_2}| \ldots |a_{\Theta_k \Phi_k}|.$$

A complementary of this theorem is

$$|a_{pq}|^{k-1} = \Sigma_{\Phi'} \varepsilon |a_{\Theta'_1 \Phi'_1}| \cdot |a_{\Theta'_2 \Phi'_2}| \ldots |a_{\Theta'_k \Phi'_k}|$$

where Θ'_r, Θ'_r are complementary to Θ_r, Φ_r respectively.

An extensional is

$$|a_{xy}|^{k-1} \begin{vmatrix} (a_{pq}) & (a_{py}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix} = \Sigma_{\Phi} \varepsilon \begin{vmatrix} (a_{\Theta_1 \Phi_1}) & (a_{\Theta_1 y}) \\ (a_{x \Phi_1}) & (a_{xy}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a_{\Theta_2 \Phi_2}) & (a_{\Theta_2 y}) \\ (a_{x \Phi_2}) & (a_{xy}) \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} (a_{\Theta_k \Phi_k}) & (a_{\Theta_k y}) \\ (a_{x \Phi_k}) & (a_{ky}) \end{vmatrix}.$$

This is the general theorem given by *Netto* as his extension of the general *Laplace* expansion theorem. *Netto*'s theorem is thus seen to be the outcome of the application of *Muir*'s law of extension to the general *Laplace* expansion formula.

Just as the *Laplace* expansion theorem gives us back the definition of a determinant when each of the sets $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ consists of a single number, i. e. when $k = n$, so in that case the above given complementary of *Laplace*'s theorem reduces to *Cauchy*'s theorem relating to the adjugate, and the above given extensional reduces, as remarked by *Netto*, to *Sylvester*'s first theorem.

As a fifth example a complementary of *Cauchy*'s theorem relating to the adjugate is simply the identity $|a_{pq}| = |a_{pq}|$, but an extensional is *Jacobi*'s theorem relating to a minor of the adjugate.

As a sixth example *Jacobi*'s theorem is its own complementary but an extensional of it is merely *Jacobi*'s theorem for a determinant of higher order.

As a seventh example take *Franke*'s first theorem relating to the compound of a determinant. This theorem is its own complementary, but an extensional of it is a very general theorem due to *Sylvester*, hereinafter

---

*) This Journal CXIV, p. 348. Equation (7.)

cited as *Sylvester*'s second theorem, which may be stated as follows. If Θ, Φ be sets from $1, 2, \ldots, n$ and

$$b_{\Theta\Phi} = \begin{vmatrix} (a_{\Theta\Phi}) & (a_{\Theta y}) \\ (a_{x\Phi}) & (a_{xy}) \end{vmatrix},$$

then

$$|a_{xy}|^{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} (a_{pq}) & (a_{py}) \\ (a_{xq}) & (a_{xy}) \end{vmatrix}^{\lambda'} = |b_{\Theta\Phi}|$$

where $|b_{\Theta\Phi}|$ is of order n_m and $\lambda = (n-1)_m$, $\lambda' = (n-1)_{m-1}$.

This very general theorem was enunciated without proof by *Sylvester* in 1851 and appears to have remained without proof until 1867. Proofs have been given by *Reiss, Picquet, Scott, van Velzer* and *Netto*. The proofs of *van Velzer* and *Netto* are in effect the same and depend first, on the extensional already given of *Laplace*'s expansion in binary products, and second on the fact the general determinant is not resoluble into factors.

In our fifth example it was seen that *Jacobi*'s theorem is an extensional of *Cauchy*'s theorem. Now as these two theorems correspond to *Franke*'s first and second theorems concerning the compound of a determinant, it might be expected *a priori* that *Franke*'s second theorem would be found to be an extensional of his first theorem. This is not the case and the explanation of the apparent paradox is at once seen when it is noticed that *Jacobi*'s theorem is a special case of *Sylvester*'s second theorem, viz: when $m = n-1$.

As an eighth example *Franke*'s second theorem, like *Jacobi*'s theorem, is its own complementary, but an extensional of it is merely *Franke*'s theorem for a determinant of higher order.

Kronecker speaks of *Franke*'s theorems as apparently more general than *Jacobi*'s theorem and yet as completely contained therein. There is however an important step to be taken in order to pass from *Kronecker*'s theorem to *Franke*'s theorems, a step which it took mathematicians exactly half a century to discover.

Denoting the minor $|\alpha_{\Theta\Phi}|$ of order m of the determinant A of order n by $A_{\Theta\Phi}$ and its cofactor by $\operatorname{cof}|\alpha_{\Theta\Phi}|$ or by $\operatorname{cof} A_{\Theta\Phi}$ let Δ, Δ' denote the determinants

$$|A_{\Theta\Phi}|, \quad |A^{-1}\operatorname{cof} A_{\Theta\Phi}|$$

of order n_m. Then we know that Δ, Δ' are reciprocal and therefore by *Kronecker*'s theorem

$$\Delta'_{\alpha\beta} = \Delta^{-1}\operatorname{cof}\Delta_{\alpha\beta}$$

where $\Delta_{\alpha\beta}, \Delta'_{\alpha\beta}$ are corresponding minors of Δ, Δ' of order k.

Now let

$$\delta = |\operatorname{cof} A_{\Theta\Phi}|$$

so that

$$\delta_{\alpha\beta} = A^k \Delta'_{\alpha\beta}.$$

Thus we have

$$\delta_{\alpha\beta} = \Delta^{-1} A^k \operatorname{cof} \Delta_{\alpha\beta}$$

and in particular if $k = n_m$ we have

$$\delta = \Delta^{-1} A^{n_m}.$$

Now this theorem was discovered by *Cauchy* in 1812 but exactly fifty years passed before it was seen that implies the two equations

$$\delta = A^{\lambda}, \quad \Delta = A^{\lambda'}$$

where λ, λ' have the same meanings as before. These two equations constitute *Franke*'s first theorem. By the help of the second we deduce from a preceding equation that

$$\delta_{\alpha\beta} = A^{k-\lambda'} \operatorname{cof} \Delta_{\alpha\beta}$$

which is *Franke*'s second theorem.

One of the most interesting parts of *Netto*'s paper is a simple direct proof of *Cauchy*'s theorem relating to the adjugate.

By expanding the determinant

$$\begin{vmatrix}
(\alpha_{p_1 q}) & & & & & \\
(\alpha_{p_2 q}) & (\alpha_{p_2 q}) & & & & \\
 & (\alpha_{p_3 q}) & (a_{p_3 q}) & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & (a_{p_{n-1} q}) & (a_{p_{n-1} q}) & \\
 & & & & (a_{p_n q}) &
\end{vmatrix}$$

where

$$p_r = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n.$$
$$q = 1, 2, \ldots, n$$

by *Laplace*'s theorem in two different ways, first by rows and second by columns we find

$$|A_{pq}| = |a_{pq}|^{n-1}$$

where A_{pq} is the cofactor of a_{pq} in $|a_{pq}|$ and $p = 1, 2, \ldots, n$.

It would be still more interesting if an equally simple direct proof could be found for *Franke*'s first theorem and hence for *Sylvester*'s second theorem.

Ueber die Discriminante einer gewissen quadratischen Gleichung und die Bedingungen für den Kreis bei allgemeinen projectiven Coordinaten.

(Von Herrn *F. Dingeldey* in Darmstadt).

§ 1.

Einleitende historische Bemerkungen.

Bekanntlich hat *E. Kummer*[1]) die Discriminante der kubischen Gleichung, durch welche die Hauptaxen einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Fläche zweiter Ordnung bestimmt werden, in einer Summe von sieben Quadraten dargestellt, allerdings, wie er selbst sagt, nicht vermöge einer directen Methode, sondern durch Versuche. Auf anderem Wege und unter ausgiebiger Benutzung der zwischen den neun Coefficienten einer orthogonalen Substitution bestehenden 22 Relationen ist *C. G. J. Jacobi*[2]) zu dem gleichen Resultate gelangt, indem er ausserdem zeigte, dass jedes der sieben Quadrate durch das Product jener Discriminante und je einer Function der Substitutionscoefficienten ausgedrückt werden kann, in Folge dessen die Summe dieser Functionen gleich der Einheit ist. *C. W. Borchardt*[3]) hat unter Benutzung von Sätzen der Determinantentheorie die wahre analytische Quelle angegeben, die sowohl das *Kummer*sche Resultat ergiebt, als auch „eine Ausdehnung dieses Resultates auf die allgemeine Gleichung n-ter Ordnung, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten findet“,

[1]) Dieses Journal Bd. 26, S. 268—272, 1843.

[2]) Giornale arcadico, Bd. 98, 1844 oder dieses Journal Bd. 30, S. 46—50; in der eigenen Ausgabe der Werke Bd. 1, S. 271—276; Bd. 3 der Gesammelten Werke S. 459 bis 465.

[3]) Dieses Journal Bd. 30, S. 38—45, 1845 oder Gesammelte Werke S. 3—13; vgl. auch Journal de Mathématiques publié par *Liouville* Bd. 12, S. 50—67, 1847 oder Gesammelte Werke S. 15—30.

bekanntlich jene Gleichung

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

von der bei beliebig hohem Grade n *A. Cauchy*[1]) zuerst zeigte, dass sie, natürlich unter Voraussetzung reeller a_{ik}, stets n reelle Wurzeln hat. Alsdann hat auch *O. Hesse*[2]) die *Jacobi*schen Formeln für beliebiges n erweitert und damit die *Borchardt*sche Entdeckung verificirt. Herr *G. Bauer*[3]) führte im Falle $n = 3$ die Zerlegung der Discriminante in eine Summe von sieben Quadraten auf directem Wege durch, indem er die Quadrate unmittelbar aus der Determinantenform der Discriminante entwickelte. Mit den vorerwähnten Arbeiten nahe verwandt ist eine weitere Abhandlung von *O. Hesse*[4]), in der die Discriminante der *quadratischen* Gleichung

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki},\ a^2+b^2+c^2 = 1),$$

von welcher die Hauptaxen eines aus einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung durch eine Ebene herausgeschnittenen Kegelschnitts abhängen, in eine Summe von 10, 7, 6 oder 5 Quadraten zerlegt wird; bezüglich einer Zerlegung in die Summe von 2 Quadraten bemerkte er, dass sie vielleicht ganz unmöglich sei, ein Irrthum, denn Herr *Henrici*[5]) gab diese Zerlegung wirklich, indem er die Gleichung (2.) in die Form

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} e_{11}-\lambda & e_{12} \\ e_{21} & e_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

brachte, und hier ist die Discriminante gleich $(e_{11}-e_{22})^2+4e_{12}^2$. Als Summe

---

[1]) Exercices de Mathématiques (Anciens exercices), Paris 1829 oder Oeuvres complètes, 2. Serie, Bd. 9, S. 175—187.

[2]) Dieses Journal Bd. 57, S. 175—182, 1859 oder Gesammelte Werke S. 489—496.

[3]) Dieses Journal Bd. 71, S. 40—45, 1868.

[4]) Dieses Journal Bd. 60, S. 305—312, 1862 oder Gesammelte Werke S. 497—506.

[5]) Dieses Journal Bd. 64. S. 187—192, 1864.

von sechs Quadraten wurde die Discriminante auch von Herrn *G. Bauer*[1]) dargestellt.

Eine allgemeinere Gattung von Gleichungen mit nur reellen Wurzeln hat *K. Weierstrass*[2]) zuerst gefunden. Man erhält diese Gleichungen durch Nullsetzen einer Determinante

$$(4.) \qquad \Gamma \equiv \Sigma \pm (\gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{nn}),$$

deren Elemente γ_{ik} gleich $a_{ik}+\lambda b_{ik}$ sind, wobei die eine der beiden quadratischen Formen von n Veränderlichen, deren Coefficienten die a_{ik} bezw. b_{ik} sind, für reelle Werthe der Veränderlichen nur Werthe von gleichem Vorzeichen annehmen darf (definit sein muss), während im übrigen die $a_{ik}=a_{ki}$ und $b_{ik}=b_{ki}$ beliebige reelle Zahlen bedeuten. *A. Clebsch*[3]) hat die Gültigkeit der *Weierstrass*schen Entdeckung auch für den Fall $a_{ik}=p_{ik}+q_{ik}\sqrt{-1}$, $a_{ki}=p_{ik}-q_{ik}\sqrt{-1}$ erwiesen, unter p_{ik} und q_{ik} reelle Grössen verstanden, während nun die b_{ik} die Coefficienten der definiten Form sein müssen. Ausserdem hat er gezeigt, dass sich in diesem Falle die Discriminante der Gleichung als Summe von Quadraten darstellen lässt.

Endlich hat Herr *S. Gundelfinger*[4]) noch auf eine Gattung von Gleichungen mit nur reellen Wurzeln aufmerksam gemacht; auch diese Gleichungen erhält man durch Nullsetzen einer Determinante

$$(5.) \qquad B \equiv \Sigma \pm (\beta_{11}\beta_{22}\cdots\beta_{nn}),$$

und zwar besitzen ihre Elemente die Werthe

$$(6.) \qquad \beta_{ii}=\alpha_{ii}-\lambda, \qquad \beta_{ik}=\alpha_{ik} \qquad (i \gtrless k),$$

wobei

$$(7.) \qquad \alpha_{ik}=\omega_{1i}a_{1k}+\omega_{2i}a_{2k}+\cdots+\omega_{ni}a_{nk},$$

unter $a_{ik}=a_{ki}$ und $\omega_{ik}=\omega_{ki}$ die Coefficienten zweier Formen zweiten Grades von n Veränderlichen verstanden; doch muss die eine der beiden Formen,

---

[1]) Dieses Journal Bd. 71, S. 46—52, 1868.

[2]) Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1858, S. 207—213 oder Gesammelte Werke Bd. 1, S. 233—239.

[3]) Dieses Journal Bd. 62, S. 232—245, 1861; vgl. auch Bd. 57, S. 326—328, 1859. Für den speciellen Fall $b_{ii}=1, b_{ik}=0$ $(i \gtrless k)$ findet sich diese Bemerkung bereits bei *Ch. Hermite*, Comptes rendus de l'académie des sciences, Bd. 41, S. 181 f., Paris 1855. Eine andere Verallgemeinerung des *Weierstrass*schen Satzes giebt *E. B. Christoffel*, dieses Journal Bd. 63, S. 255—272, 1864.

[4]) Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von *S. Gundelfinger*, herausgegeben von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, S. 70—72.

etwa die mit den Coefficienten ω_{ik}, definit sein. Natürlich ist hier im allgemeinen α_{ik} von α_{ki} verschieden. Wenn die Determinante der ω_{ik} verschwindet, so ist in den Fällen $n = 3$ bezw. $n = 4$ die Gleichung $B = 0$ diejenige, von welcher die Hauptaxen einer auf allgemeine projective Dreiecks- bezw. Tetraedercoordinaten bezogenen Curve bezw. Fläche zweiter Ordnung abhängen[1]). Im Folgenden möchte ich zeigen, auf welche Weise sich alsdann im Falle $n = 3$ die Discriminante von $B = 0$ in eine Summe von zwei Quadraten zerlegen lässt. Der geometrischen Bedeutung dieser Gleichung entsprechend werden die Bedingungen, unter denen die Curve zweiter Ordnung einen Kreis darstellt, für diese Zerlegung massgebend sein; demgemäss beginne ich damit diese Bedingungen in einfachster Weise abzuleiten und ausserdem werde ich zeigen, in welcher Beziehung sie zu solchen Bedingungen stehen, die sich, gleichfalls bei Dreieckscoordinaten mit beliebiger Lage des Einheitspunktes, nach einer Bemerkung von Herrn *Gundelfinger* ergeben.

§ 2.

Ableitung der Kreisbedingungen bei beliebigem Coordinatendreieck.

Meist werden diese Bedingungen abgeleitet unter Benutzung des Potenzbegriffes oder auch unter Benutzung der Thatsache, dass die Gleichungen aller Kreise der Ebene nur um solche Glieder differiren können, die aus dem Product eines linearen Factors in den Ausdruck für die unendlich ferne Gerade[2]) bestehen. Auch beschränkt man sich meist auf den Fall der barycentrischen Coordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Schwerpunkt des Coordinatendreiecks liegt, oder den Fall jener Coordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises liegt. Herr *Gundelfinger* gelangt bei beliebigem Coordinatendreieck zu den Kreisbedingungen durch die Thatsache, dass der Ausdruck für die unendlich fernen Punkte der beiden Hauptaxen eines Kegelschnitts im Falle des Kreises identisch verschwindet[3]).

---

[1]) A. a. O. S. 86f. Vgl. auch *Ph. Brückel*, „Zusammenstellung der Formeln des Herrn *S. Gundelfinger* zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten", dieses Journal Bd. 119, S. 219, 1898.

[2]) Vgl. z. B. *N. M. Ferrers*, „An elementary treatise on trilinear coordinates", 1. Aufl. London 1861, S. 84f.; 3. Aufl. London 1876, S. 86f.; ferner *G. Salmon*, „Analytische Geometrie der Kegelschnitte", bearbeitet von *W. Fiedler*, 3. Aufl. Leipzig 1873, S. 193ff.; 5. Aufl. Leipzig 1888, S. 567f.

[3]) In den schon oben citirten „Vorlesungen", S. 96.

Die einfachste Art die Bedingungen abzuleiten, unter denen die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung einen Kreis darstellt, erhält man wohl im Anschluss an diejenige Definition, welche den Kreis lediglich als eine durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehende Curve zweiter Ordnung auffasst. Wir wollen diese Bedingungen ableiten unter Annahme eines beliebigen Coordinatendreiecks bei beliebiger Lage des Einheitspunktes E, die nur der einen Beschränkung unterliegt, dass E in keine Seite des Coordinatendreiecks fallen darf. Sind e_1, e_2, e_3 die Abstände des Einheitspunktes von den Seiten, sind ferner h_1, h_2, h_3 die Höhen des Coordinatendreiecks und setzen wir

$$(8.) \qquad \frac{e_i}{h_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

so stellt

$$(9.) \qquad p_x \equiv p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

die Gleichung der unendlich fernen Geraden dar, und die Gleichung des imaginären Kreispunktepaares wird

$$(10.) \quad \omega(u,u) \equiv \omega_{11}u_1 + 2\omega_{12}u_1u_2 + \omega_{22}u_2^2 + 2\omega_{13}u_1u_3 + 2\omega_{23}u_2u_3 + \omega_{33}u_3^2 = 0,$$

wobei

$$(11.) \qquad \omega_{ii} = \frac{1}{e_i^2}, \quad \omega_{ik} = \frac{1}{e_i e_k} \cdot \cos(a_i, a_k), \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

unter (a_i, a_k) den Nebenwinkel von demjenigen Winkel der Seiten a_i und a_k des Coordinatendreiecks verstanden, in welchem der Einheitspunkt liegt[1]). Das Paar von Schnittpunkten der unendlich fernen Geraden mit der Curve zweiter Ordnung

$$(12.) \quad f(x,x) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

ist alsdann in variabelen Liniencoordinaten u_i $(i = 1, 2, 3)$ dargestellt durch

$$(13.) \quad s(u,u) \equiv \sum_1^3{}_i \sum_1^3{}_k s_{ik}u_iu_k \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (s_{ik} = s_{ki}),$$

wobei

$$(14.) \qquad \begin{cases} s_{11} = a_{22}p_3^2 + a_{33}p_2^2 - 2a_{23}p_2p_3, \\ s_{12} = a_{13}p_2p_3 + a_{23}p_1p_3 - a_{33}p_1p_2 - a_{12}p_3^2, \end{cases}$$

[1]) Vgl. *Gundelfinger* a. a. O. S. 3 und S. 57.

während die übrigen s_{ik} aus den hier angegebenen durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen. Soll nun $f(x, x) = 0$ die Gleichung eines Kreises sein, so muss $s(u, u) = 0$ gleichbedeutend sein mit $\omega(u, u) = 0$, d. h. es muss für beliebige Werthe der u_i die Beziehung stattfinden

(15.) $$s(u, u) = \varrho \cdot \omega(u, u),$$

wobei ϱ einen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Hieraus ergeben sich die Bedingungen für den Kreis sofort in der Gestalt:

(16.) $$\frac{s_{11}}{\omega_{11}} = \frac{s_{22}}{\omega_{22}} = \frac{s_{33}}{\omega_{33}} = \frac{s_{23}}{\omega_{23}} = \frac{s_{31}}{\omega_{31}} = \frac{s_{12}}{\omega_{12}}.$$ [1])

Den gemeinsamen Werth ϱ dieser Quotienten $\frac{s_{ik}}{\omega_{ik}}$ kann man z. B. mit Hülfe der Relation

(17.) $$s_{22}\omega_{33} + s_{33}\omega_{22} - 2s_{23}\omega_{23} = p_1^2 \cdot [a, \omega]$$

finden, in der

(18.) $$[a, \omega] = a_{11}\omega_{11} + 2a_{12}\omega_{12} + a_{22}\omega_{22} + 2a_{13}\omega_{13} + 2a_{23}\omega_{23} + a_{33}\omega_{33},$$

eine Relation, die sich vermöge der zwischen den Coefficienten ω_{ik} und p_1, p_2, p_3 bestehenden Beziehungen

(19.) $$\tfrac{1}{2}\omega'(p_i) \equiv \omega_{i1}p_1 + \omega_{i2}p_2 + \omega_{i3}p_3 = 0$$ [2]) $(i = 1, 2, 3)$

leicht ergiebt. Setzt man nun in (17.) $s_{ik} = \varrho\omega_{ik}$, so wird $2\varrho(\omega_{22}\omega_{33} - \omega_{23}^2) = p_1^2 \cdot [a, \omega]$; hier ist aber $\omega_{22}\omega_{33} - \omega_{23}^2 = \tau p_1^2$, wobei τ eine Constante bezeichnet, die nur von den Grössen e_i und den Stücken des Coordinatendreiecks abhängt; es ist z. B., wenn wir mit Δ den Inhalt dieses Dreiecks bezeichnen,

(20.) $$\tau = \frac{1}{4\Delta^2(p_1 p_2 p_3)^2}.$$ [3])

---

[1]) Für den Fall solcher Dreieckscoordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises liegt, oder für den Fall barycentrischer Coordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Schwerpunkt des Coordinatendreiecks liegt, findet man die entsprechenden Gleichungen mehrfach in der Litteratur, allerdings meist solche Gleichungen, die nur die zu s_{11}, s_{22}, s_{33} analogen Coefficienten enthalten (vgl. z. B. bei barycentrischen Coordinaten *N. M. Ferrers* im Quart. Journal Bd. 2, S. 267 f., 1858; bei den anderen soeben erwähnten Dreieckscoordinaten giebt derselbe Autor die Bedingungen an der schon früher citirten Stelle seines Buches). Nur bei *E. d'Ovidio* fand ich Bedingungsgleichungen, welche die zu *allen* s_{ik} analogen Glieder enthalten (Giornale di Matematiche, Bd. 6, S. 211 ff., 1868).

[2]) Vgl. *Gundelfinger*, a. a. O. S. 14.

[3]) Ebendaselbst S. 60 ff.; hier werden mehrere Formen angegeben, in die der Ausdruck für τ gebracht werden kann.

Man findet auf solche Weise

$$\varrho = \frac{[a, \omega]}{2\tau}. \tag{21.}$$

Die Gleichungen (16.) sind natürlich nicht von einander unabhängig, da ja nur zwei Bedingungen zu erfüllen sind, wenn $f(x, x) = 0$ einen Kreis darstellen soll; vielmehr bestehen die zu (19.) analogen Relationen

$$\tfrac{1}{2}s'(p_i) = s_{i1}p_1 + s_{i2}p_2 + s_{i3}p_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{22.}$$

Von den Kreisbedingungen äusserlich verschiedene ergeben sich aus einer Bemerkung von Herrn ***Gundelfinger***. Er zeigte, dass die unendlich fernen Punkte der Hauptaxen einer Curve zweiter Ordnung gegeben sind durch

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{23.}$$

wobei

$$\Psi(u, x) \equiv \tfrac{1}{4}\sum_1^3{}_i\, \omega'(u_i) \cdot f'(x_i); \tag{24.}$$

im Falle eines Kreises müssen nun die Coefficienten von u_i^2 und von $u_i u_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ in (23.) verschwinden[1]). Unter Anwendung der abkürzenden Bezeichnung

$$\alpha_{ik} \equiv \omega_{1i}a_{1k} + \omega_{2i}a_{2k} + \omega_{3i}a_{3k} \tag{25.}$$

erhält man hiernach:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & p_2 \\ \alpha_{13} & p_3 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \alpha_{23} & p_3 \\ \alpha_{21} & p_1 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \alpha_{31} & p_1 \\ \alpha_{32} & p_2 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} \alpha_{33} & p_3 \\ \alpha_{31} & p_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{22} & p_2 \\ \alpha_{21} & p_1 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & p_1 \\ \alpha_{12} & p_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{33} & p_3 \\ \alpha_{32} & p_2 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \alpha_{22} & p_2 \\ \alpha_{23} & p_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & p_1 \\ \alpha_{13} & p_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \tag{26.}$$

Vor den durch (16.) dargestellten Bedingungen zeichnen sich diese Gleichungen (26.) dadurch aus, dass sie die Coefficienten p_i nicht wie jene im zweiten Grade, sondern nur linear enthalten; natürlich müssen aber die Gleichungen (26.) und (16.) äquivalent sein. In der That ist z. B.

$$\begin{cases} \alpha_{12}p_3 - \alpha_{13}p_2 = \dfrac{\omega_{12}\omega_{13}}{p_1}\left(\dfrac{s_{12}}{\omega_{12}} - \dfrac{s_{13}}{\omega_{13}}\right), \\ \alpha_{33}p_1 - \alpha_{31}p_3 - (\alpha_{22}p_1 - \alpha_{21}p_2) = \dfrac{\omega_{22}\omega_{33}}{p_1}\left(\dfrac{s_{22}}{\omega_{22}} - \dfrac{s_{33}}{\omega_{33}}\right), \end{cases} \tag{27.}$$

und die übrigen Gleichungen (26.) hängen in analoger Weise mit (16.)

[1]) A. a. O. S. 96.

zusammen. Es ergeben sich diese Beziehungen zwischen den beiden Gleichungssystemen lediglich unter Anwendung der Relationen (19.).

§ 3.

Die Discriminante der quadratischen Gleichung für die Hauptaxentransformation.

Die Aufgabe, die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung $f(x, x) = 0$ mit einem einzigen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt auf die Hauptaxen zu transformiren, also in die Gestalt

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \varkappa X_3^2 = 0 \tag{28.}$$

überzuführen, hängt, wie schon in § 1 bemerkt wurde, bei Anwendung allgemeinster projectiver Coordinaten von der Lösung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{29.}$$

ab, in der $\alpha_{ik} = \omega_{1i}a_{1k} + \omega_{2i}a_{2k} + \omega_{3i}a_{3k}$. Nach Absonderung der Wurzel $\lambda = 0$ reducirt sich (29.) auf die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - [a, \omega]\lambda + \tau F(p, p) = 0, \tag{30.}$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 die Coefficienten von X_1^2 und X_2^2 in (28.) sind, während $\varkappa$ den Werth $A : F(p, p)$ besitzt, unter A die Determinante von $f(x, x)$, unter $F(p, p)$ den Ausdruck

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}$$

verstanden*). Soll $f(x, x) = 0$ die Gleichung eines Kreises sein, so muss die quadratische Gleichung (30.) zwei gleiche Wurzeln haben, somit die Discriminante

$$D \equiv [a, \omega]^2 - 4\tau F(p, p) \tag{31.}$$

verschwinden. Da aber die Coefficienten von $f(x, x) = 0$ zwei Bedingungen erfüllen müssen, wenn diese Gleichung einen Kreis darstellen soll, so wird D als Summe von Quadraten darstellbar sein. In dem speciellen Falle von Parallelcoordinaten mit dem Axenwinkel w ist bekanntlich

$$\sin^4 w \cdot D = (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 w + [(a_{11} + a_{22})\cos w - 2a_{12}]^2, \tag{32.}$$

*) Näheres bei *Gundelfinger* a. a. O. S. 85—91.

und es fragt sich nun, in welcher Weise man im Falle beliebiger Dreieckscoordinaten die analoge Darstellung der Discriminante D erreichen kann. Zum Zweck einer solchen Darstellung wird man zunächst versuchen, $[a, \omega]$ und $F(p, p)$ durch die Grössen s_{ik} auszudrücken. Man findet leicht

$$(33.) \qquad p_1 p_2 p_3 [a, \omega] = -(s_{11} p_1 \omega_{23} + s_{22} p_2 \omega_{31} + s_{33} p_3 \omega_{12});$$

ferner ist

$$(34.) \quad \begin{cases} 4(p_1 p_2 p_3)^2 F(p,p) = -s_{11}^2 p_1^4 - s_{22}^2 p_2^4 - s_{33}^2 p_3^4 + 2 s_{22} s_{33} p_2^2 p_3^2 \\ \qquad\qquad + 2 s_{33} s_{11} p_3^2 p_1^2 + 2 s_{11} s_{22} p_1^2 p_2^2 \text{*}). \end{cases}$$

Daher wird

$$(35.) \quad \begin{cases} (p_1 p_2 p_3)^2 D = s_{11}^2 p_1^2 (\omega_{23}^2 + \tau p_1^2) + s_{22}^2 p_2^2 (\omega_{31}^2 + \tau p_2^2) + s_{33}^2 p_3^2 (\omega_{12}^2 + \tau p_3^2) \\ \qquad + 2 s_{22} s_{33} p_2 p_3 (\omega_{12}\omega_{13} - \tau p_2 p_3) \\ \qquad + 2 s_{33} s_{11} p_3 p_1 (\omega_{23}\omega_{21} - \tau p_3 p_1) + 2 s_{11} s_{22} p_1 p_2 (\omega_{31}\omega_{32} - \tau p_1 p_2). \end{cases}$$

Mit Hülfe der Relationen**)

$$(36.) \qquad \tau p_i p_k = \Omega_{ik},$$

wobei Ω_{ik} die Unterdeterminante von ω_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix}$$

bezeichnet, verwandelt sich (35.) in

$$(37.) \quad \begin{cases} (p_1 p_2 p_3)^2 D = s_{11}^2 p_1^2 \omega_{22}\omega_{33} + s_{22}^2 p_2^2 \omega_{33}\omega_{11} + s_{33}^2 p_3^2 \omega_{11}\omega_{22} \\ \qquad + 2 s_{22} s_{33} p_2 p_3 \omega_{11}\omega_{23} + 2 s_{33} s_{11} p_3 p_1 \omega_{22}\omega_{31} + 2 s_{11} s_{22} p_1 p_2 \omega_{33}\omega_{12} \end{cases}$$

und durch eine weitere leichte Umformung, sowie mit Rücksicht auf (20.) erhält man

$$(38.) \quad \begin{cases} D = -4 \Delta^2 \tau \omega_{11}\omega_{22}\omega_{33} \left\{ \left(\frac{s_{22}}{\omega_{22}} - \frac{s_{33}}{\omega_{33}}\right)^2 p_2 p_3 \omega_{23} + \left(\frac{s_{33}}{\omega_{33}} - \frac{s_{11}}{\omega_{11}}\right)^2 p_3 p_1 \omega_{31} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}} - \frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)^2 p_1 p_2 \omega_{12} \right\}. \end{cases}$$

Liegt der Einheitspunkt im Inneren eines spitzwinkligen Coordinatendreiecks, so sind die Grössen p_i sämmtlich positiv, $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$ negativ, D würde daher in diesem Falle bereits als Summe *dreier* Quadrate dar-

---

*) Für den Fall barycentrischer Coordinaten findet sich diese Relation bei *L. Schendel* „Elemente der analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten", Jena 1874, S. 79.

**) Vgl. *Gundelfinger* a. a. O. S. 60.

gestellt sein und $D = 0$ die Gleichungen

$$\frac{s_{11}}{\omega_{11}} = \frac{s_{22}}{\omega_{22}} = \frac{s_{33}}{\omega_{33}}$$

zur Folge haben. Um nun D ganz allgemein als Summe *zweier* Quadrate darzustellen, ist die rechte Seite von (38.) etwas umzuformen, was auf verschiedene Weise geschehen kann, je nachdem man den einen oder den anderen der Indices 1, 2, 3 bevorzugt. Wir führen z. B. für ω_{23} den aus (36.) folgenden Werth $\frac{\omega_{12}\omega_{13} - \tau p_2 p_3}{\omega_{11}}$ ein und ersetzen p_1 mit Hülfe von (19.) durch $-\frac{\omega_{12}p_2 + \omega_{13}p_3}{\omega_{11}}$. Alsdann erhält man leicht den folgenden Ausdruck

$$(39.)\quad D = 4\Delta^2\tau\omega_{22}\omega_{33}\left\{\left(\frac{s_{22}}{\omega_{22}} - \frac{s_{33}}{\omega_{33}}\right)^2 \tau p_2^2 p_3^2 + \left[\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}} - \frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)\omega_{12}p_2 + \left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}} - \frac{s_{33}}{\omega_{33}}\right)\omega_{13}p_3\right]^2\right\}.$$

Zwei andere Darstellungen der gewünschten Art entstehen hieraus durch cyklische Vertauschung der Indices; so z. B.:

$$(39^a.)\quad D = 4\Delta^2\tau\omega_{11}\omega_{22}\left\{\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}} - \frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)^2 \tau p_1^2 p_2^2 + \left[\left(\frac{s_{33}}{\omega_{33}} - \frac{s_{11}}{\omega_{11}}\right)\omega_{31}p_1 + \left(\frac{s_{33}}{\omega_{33}} - \frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)\omega_{32}p_2\right]^2\right\}.$$

Ferner kann man an Stelle von s_{33} den Coefficienten s_{12} einführen; aus (22.) folgt nämlich $s_{33}p_3^2 = s_{11}p_1^2 + s_{22}p_2^2 + 2s_{12}p_1p_2$, und wenn man diesen Ausdruck in (39ª.) einführt sowie die Relationen (19.) und (20.) berücksichtigt, ergiebt sich:

$$(40.)\quad D = \frac{\omega_{11}\omega_{22}}{p_3^2}\left\{\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}} - \frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)^2\tau + \frac{\omega_{12}^2}{p_3^2}\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}} + \frac{s_{22}}{\omega_{22}} - 2\frac{s_{12}}{\omega_{12}}\right)^2\right\}.$$

In dieser Formel ist die für schiefwinklige Parallelcoordinaten mit dem Axenwinkel w giltige Formel (32.) als specieller Fall enthalten. Um diese Coordinaten zu bekommen, lässt man die Seite a_3 des Coordinatendreiecks mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen und verlegt den Einheitspunkt E auf die Halbirungslinie des Winkels w der Seiten a_1 und a_2 der Art, dass die von E bis an die Seite a_1 gezogene Parallele zu a_2 die Länge 1 hat, ebenso wie die von E bis an die Seite a_2 gezogene Parallele zu a_1*). Es ist alsdann

$$e_1 = e_2 = \sin w, \quad e_3 = \infty, \quad p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = 1,$$
$$\omega_{11} = \omega_{22} = \frac{1}{\sin^2 w}, \quad \omega_{12} = -\frac{\cos w}{\sin^2 w}, \quad \tau = \frac{1}{\sin^2 w};$$

ferner wird $s_{11} = a_{22}$, $s_{22} = a_{11}$, $s_{12} = -a_{12}$, und (40.) geht sofort über in (32.).

*) Vgl. *Gundelfinger* a. a. O. S. 8.

Auch die in § 1 erwähnte, zuerst von *Henrici* gelöste Aufgabe, die Discriminante der quadratischen Gleichung

$$(41.) \qquad -\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

in eine Summe von zwei Quadraten zu zerlegen, ist nunmehr auf neuem Wege gelöst. Es ist dies jene Gleichung, von deren Wurzeln die Hauptaxen des Kegelschnitts abhängen, der aus einer auf rechtwinklige Parallelcoordinaten bezogenen Fläche zweiter Ordnung

$$(42.) \quad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

durch die Ebene

$$(43.) \qquad ax+by+cz+d=0$$

herausgeschnitten wird. Nehmen wir nämlich an, dass $a^2+b^2+c^2$ gleich 1 sei, dass mit anderen Worten die Gleichung der Schnittebene z. B. in der *Hesse*schen Normalform vorliege, so geht die Gleichung (41.) aus

$$(30.) \qquad \lambda^2-[a,\omega]\lambda+\tau F(p,p)=0$$

hervor, wenn man setzt

$$(44.) \quad \begin{cases} \omega_{11}=b^2+c^2,\ \omega_{22}=c^2+a^2,\ \omega_{33}=a^2+b^2,\ \omega_{23}=-bc,\ \omega_{31}=-ca, \\ \omega_{12}=-ab,\ p_1=a,\ p_2=b,\ p_3=c,\ \tau=1,\ a^2+b^2+c^2=1. \end{cases}$$

Auch die Relationen $\omega'(p_i)=0$ sowie $\Omega_{ik}=\tau p_i p_k$ bleiben alsdann erhalten, jedoch ist natürlich $p_1+p_2+p_3$ nicht mehr gleich der Einheit. Uebrigens lässt sich auch durch Anwendung elementarer Sätze der Determinantentheorie der Ausdruck (41.) nach Multiplication mit λ in eine Determinante von der Gestalt (29.) überführen und hierdurch gleichfalls die bei Beachtung der Relationen (44.) vorhandene Identität von (41.) und (30.) beweisen.

Es ist damit gezeigt, dass man als ***Bedingungen, unter denen die Fläche*** (42.) ***von der Ebene*** (43.) ***in einem Kreise geschnitten wird,*** wieder Gleichungen von der Form (16.) hat:

$$\frac{s_{11}}{\omega_{11}}=\frac{s_{22}}{\omega_{22}}=\frac{s_{33}}{\omega_{33}}=\frac{s_{23}}{\omega_{23}}=\frac{s_{31}}{\omega_{31}}=\frac{s_{12}}{\omega_{12}}$$

die, wie schon bemerkt, nur zwei von einander ***unabhängige*** Gleichungen

darstellen. Jedoch ist jetzt mit Rücksicht auf (44.) z. B.

$$(45.) \qquad \begin{cases} s_{11} = a_{22}c^2 + a_{33}b^2 - 2a_{23}bc \\ s_{12} = a_{13}bc + a_{23}ac - a_{33}ab - a_{12}c^2 \end{cases}$$

und für die ω_{ik} hat man die in (44.) angegebenen Werthe einzutragen. Die Gleichungen $\frac{s_{12}}{\omega_{12}} = \frac{s_{13}}{\omega_{13}}$ und $\frac{s_{11}}{\omega_{11}} = \frac{s_{22}}{\omega_{22}}$ sind alsdann mit denjenigen identisch, welche man in *Hesses* Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes (3. Aufl. Leipzig 1876, S. 403, Gl. (35.)) auf anderem Wege abgeleitet findet, nur stehen dort statt der Indices 1, 2, 3 bei den Coefficienten a_{ik} die Indices 0, 1, 2.

Ueber eine *Jacobi*sche Gleichung.

(Von Herrn *Josef Sterba* in Wien.)

Im XV. Bande dieser Zeitschrift hat *Jacobi* in der Abhandlung „Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales“ durch Integration des sinus amplitudinis eines zusammengesetzten Argumentes gezeigt, dass $\operatorname{sinam} a \operatorname{sinam} b + \operatorname{sinam} u \operatorname{sinam}(u+a+b) - \operatorname{sinam}(u+a) \operatorname{sinam}(u+b) = k^2 \operatorname{sinam} a \operatorname{sinam} b \operatorname{sinam} u \operatorname{sinam}(u+a) \operatorname{sinam}(u+b) \operatorname{sinam}(u+a+b)$ ist, von welcher Gleichung er sagt „quae est formula nova, maximi momenti per totam theoriam functionum ellipticarum“. *Richelot* hat einen directen Beweis für jene Formel gegeben (s. *Enneper*, Elliptische Functionen), indem er bewies, dass allgemein die Relation besteht

$$\operatorname{sinam}(\alpha+\beta)\operatorname{sinam}(\alpha-\beta)+\operatorname{sinam}(\beta+\gamma)\operatorname{sinam}(\beta-\gamma)+\operatorname{sinam}(\gamma+\alpha)\operatorname{sinam}(\gamma-\alpha)$$
$$= -k^2 \operatorname{sinam}(\alpha+\beta)\operatorname{sinam}(\alpha-\beta)\operatorname{sinam}(\beta+\gamma)\operatorname{sinam}(\beta-\gamma)\operatorname{sinam}(\gamma+\alpha)\operatorname{sinam}(\gamma-\alpha).$$

Es liegt nahe, diese Gleichung zu verallgemeinern, indem man zu den Elementen α, β, γ ein viertes δ hinzutreten lässt. Im Folgenden bedienen wir uns für sinam cosam, tangam, Δam der kürzeren Schreibweise sn, cn, tn, dn.

Setzt man nun

$$\operatorname{sn}^2\alpha = x, \quad \operatorname{sn}^2\beta = y, \quad \operatorname{sn}^2\gamma = z, \quad \operatorname{sn}^2\delta = w,$$

so ist bekanntlich

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta) = \frac{x-y}{1-k^2xy},$$

$$\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma) = \frac{y-z}{1-k^2yz},$$

$$\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta) = \frac{z-w}{1-k^2zw},$$

$$\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\operatorname{sn}(\delta-\alpha) = \frac{w-x}{1-k^2wx}.$$

Addirt man diese vier Gleichungen und bringt rechts die Brüche auf

den gemeinsamen Nenner

$$N = (1-k^2xy)(1-k^2yz)(1-k^2zw)(1-k^2wx),$$

so findet man für den Zähler den Ausdruck

$$\begin{aligned} Z = &-k^2(xy^2-x^2y+x^2w-xw^2+yz^2-y^2z+zw^2-z^2w) \\ &+k^4(x^2y^2w-x^2y^2z+y^2z^2x-y^2z^2w+z^2w^2y-z^2w^2x+w^2x^2z-w^2x^2y) \\ &= -k^2\cdot A+k^4\cdot B, \end{aligned}$$

wo A und B die beiden Klammergrössen in Z bedeuten. Man verificirt leicht

$$\begin{aligned} A = &(x-y)(y-z)(z-w)+(y-z)(z-w)(w-x) \\ &+(z-w)(w-x)(x-y)+(w-x)(x-y)(y-z); \\ B = &\,wx(x-y)(y-z)(z-w)+xy(y-z)(z-w)(w-x) \\ &+yz(z-w)(w-x)(x-y)+zw(w-x)(x-y)(y-z). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit als Summe der rechten Seiten obiger vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{Z}{N} = -k^2\Big\{&\frac{(x-y)(y-z)(z-w)}{(1-k^2xy)(1-k^2yz)(1-k^2zw)}+\frac{(y-z)(z-w)(w-x)}{(1-k^2yz)(1-k^2zw)(1-k^2wx)} \\ &+\frac{(z-w)(w-x)(x-y)}{(1-k^2zw)(1-k^2wx)(1-k^2xy)}+\frac{(w-x)(x-y)(y-z)}{(1-k^2wx)(1-k^2xy)(1-k^2yz)}\Big\}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\frac{(x-y)(y-z)(z-w)}{(1-k^2xy)(1-k^2yz)(1-k^2zw)} = \\ &\qquad \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\mathrm{sn}(\beta+\gamma)\mathrm{sn}(\beta-\gamma)\mathrm{sn}(\gamma+\delta)\mathrm{sn}(\gamma-\delta) \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Bezeichnet nun $\overset{4}{\Sigma} f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eine Summe von vier Gliedern, von denen jedes folgende aus dem vorhergehenden durch cyklische Vertauschung der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erhalten wird, so haben wir demnach folgende Fundamentalformel:

$$(1.)\quad \begin{cases} \overset{4}{\Sigma}\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\mathrm{sn}(\alpha-\beta) = \\ \qquad -k^2\overset{4}{\Sigma}\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\mathrm{sn}(\beta+\gamma)\mathrm{sn}(\beta-\gamma)\mathrm{sn}(\gamma+\delta)\mathrm{sn}(\gamma-\delta). \end{cases}$$

Für $\gamma = \delta$ erhält man die Formel von *Richelot* und, wenn überdies $\alpha+\beta = a$, $\alpha-\beta = b$, $\gamma+\alpha = u+a+b$ gesetzt wird, die Formel *Jacobis*. Letztere kann aus Gleichung (1.) auch direct erhalten werden, wenn

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(a+b); \quad \beta = \tfrac{1}{2}(a-b); \quad \gamma = u+\tfrac{1}{2}(a+b); \quad \delta = -\tfrac{1}{2}(a+b)$$

gesetzt wird.

In Gleichung (1.) erscheinen auf der linken Seite die Summe und Differenz je zweier Elemente als Argumente. Man kann nun leicht eine

Formel herstellen, worin in jedem Gliede links je zwei Summen mit je zwei Differenzen der Elemente als Argumente auftreten. Man setze nämlich

$$\begin{aligned}\alpha' &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta),\\ \beta' &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma-\delta),\\ \gamma' &= \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\delta),\\ \delta' &= \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma+\delta);\end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \alpha'+\beta', & \alpha-\beta &= \gamma'+\delta',\\ \beta+\gamma &= -(\delta'-\alpha'), & \beta-\gamma &= \beta'-\gamma',\\ \gamma+\delta &= \alpha'-\beta', & \gamma-\delta &= \gamma'-\delta',\\ \delta+\alpha &= \delta'+\alpha', & \delta-\alpha &= -(\beta'+\gamma'),\end{aligned}$$

und die Gleichung (1.) lautet nach Weglassung der Indices

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}&\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)-\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\\ &+\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)-\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)=\\ &k^2\{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)\\ &-\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)\\ &+\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\\ &-\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\}.\end{aligned}\right.$$

Macht man $\gamma=\delta$, so ergiebt Gleichung (2.)

$$\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\alpha)+\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)-\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}2\gamma =$$
$$k^2\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\alpha)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}2\gamma,$$

und für $\gamma+\alpha=-a$, $\gamma-\alpha=-b$, $\beta+\gamma=u$:

$$\operatorname{sn}a\operatorname{sn}u+\operatorname{sn}b\operatorname{sn}(u+a+b)-\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+b)=$$
$$k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+b)\operatorname{sn}(u+a+b).$$

Setzt man aber $\gamma+\alpha=-b$, $\gamma-\alpha=-a$, $\beta+\gamma=u$, so folgt

$$\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u+\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(u+a+b)-\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+a)=$$
$$k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+a+b),$$

sodass in den beiden letzten Gleichungen a und b vertauscht erscheinen.

Die Summe beider Gleichungen giebt

$$(\operatorname{sn}a+\operatorname{sn}b)\{\operatorname{sn}u+\operatorname{sn}(u+a+b)\}-\operatorname{sn}(a+b)\{\operatorname{sn}(u+a)+\operatorname{sn}(u+b)\}=$$
$$k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+a+b)\{\operatorname{sn}(u+a)+\operatorname{sn}(u+b)\},$$

somit

$$(3.)\quad \left\{ \frac{\mathrm{sn}\,a+\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{sn}(a+b)}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u+\mathrm{sn}(a+b+u)}{\mathrm{sn}(a+u)+\mathrm{sn}(b+u)} = 1+k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+b+u).\right.$$

Wird in dieser Gleichung $-u$ für u gesetzt, so giebt der Quotient beider die neue Relation

$$\frac{1-k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+b-u)}{1+k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+b+u)} = \frac{\mathrm{sn}(a+b-u)-\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}(a+b+u)+\mathrm{sn}\,u}\cdot\frac{\mathrm{sn}(a+u)+\mathrm{sn}(b+u)}{\mathrm{sn}(a-u)+\mathrm{sn}(b-u)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung tritt bekanntlich im Additionstheorem der Integrale dritter Gattung auf; es ist nämlich nach *Jacobi*'s Bezeichnung

$$\Pi_1(a,u)+\Pi_1(b,u)-\Pi_1(a+b,u) = \tfrac{1}{2}\log\frac{1-k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+b-u)}{1+k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+b+u)},$$

also auch

$$\Pi_1(a,u)+\Pi_1(b,u)-\Pi_1(a+b,u) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\mathrm{sn}(a+u)+\mathrm{sn}(b+u)}{\mathrm{sn}(a-u)+\mathrm{sn}(b-u)}\cdot\frac{\mathrm{sn}(a+b-u)-\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}(a+b+u)+\mathrm{sn}\,u}.$$

Uebrigens lässt die rechte Seite der beiden letzten Gleichungen mit Hülfe von Gleichung (1.) sich noch auf mannigfache Weise darstellen.

Schreibt man in Gleichung (1.) $\alpha i, \beta i, \gamma i, \delta i$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und vertauscht, um den Modul nicht anmerken zu müssen, k mit k', so folgt wegen $\mathrm{sn}(i\alpha, k) = i\,\mathrm{tn}(\alpha, k')$

$$(4.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\overset{4}{\Sigma}\mathrm{tn}(\alpha+\beta)\mathrm{tn}(\alpha-\beta) = \\ &\quad -k'^2\overset{4}{\Sigma}\mathrm{tn}(\alpha+\beta)\mathrm{tn}(\alpha-\beta)\mathrm{tn}(\beta+\gamma)\mathrm{tn}(\beta-\gamma)\mathrm{tn}(\gamma+\delta)\mathrm{tn}(\gamma-\delta). \end{aligned}\right.$$

Aus Gleichung (1.) lassen sich durch Specialisirung der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oder Vermehrung derselben um $\frac{1}{2}K$ oder $\frac{1}{2}iK'$, wo K und K' die Perioden bedeuten, viele Formeln gewinnen, die in der Theorie der elliptischen Functionen Verwendung finden.

Für $k = 0$ gehen die elliptischen Transcendenten in die gewöhnlichen goniometrischen Functionen über und die Gleichungen (1.) und (4.) werden

$$\overset{4}{\Sigma}\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = 0;$$

$$\overset{4}{\Sigma}\mathrm{tang}(\alpha+\beta)\mathrm{tang}(\alpha-\beta) =$$

$$-\overset{4}{\Sigma}\mathrm{tang}(\alpha+\beta)\mathrm{tang}(\alpha-\beta)\mathrm{tang}(\beta+\gamma)\mathrm{tang}(\beta-\gamma)\mathrm{tang}(\gamma+\delta)\mathrm{tang}(\gamma-\delta),$$

Relationen, welche mit Hülfe der Formeln

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha-\operatorname{tang}^2\beta}{1-\operatorname{tang}^2\alpha\operatorname{tang}^2\beta}$$

leicht zu verificiren sind.

Aus Gleichung (1.) lässt sich noch eine merkwürdige Beziehung herleiten, wenn man die elliptischen Transcendenten durch die entsprechenden ϑ-Quotienten darstellt.

Sind nämlich die Grössen p, q, r, s und p', q', r', s' durch die Gleichungen

$$p' = \tfrac{1}{2}(p+q+r+s),$$
$$q' = \tfrac{1}{2}(p+q-r-s),$$
$$r' = \tfrac{1}{2}(p-q+r-s),$$
$$s' = \tfrac{1}{2}(p-q-r+s),$$

verbunden, so besteht zwischen den ϑ-Functionen die Relation

$$\vartheta_0(p)\vartheta_0(q)\vartheta_0(r)\vartheta_0(s)+\vartheta_1(p)\vartheta_1(q)\vartheta_1(r)\vartheta_1(s) = \vartheta_3(p')\vartheta_3(q')\vartheta_3(r')\vartheta_3(s')-\vartheta_2(p')\vartheta_2(q')\vartheta_2(r')\vartheta_2(s').$$

Wählt man nun p, q, r, s derart, dass die Argumente p', q', r', s' mit denselben identisch werden, wozu erforderlich ist, dass $p-q = r+s$ sei, so hat jedes Glied der obigen ϑ-Formel dieselben Argumente. Ein Werthesystem, welches der eben genannten Forderung entspricht, ist aber offenbar das folgende:

$$p = \alpha+\beta, \quad q = \alpha-\beta, \quad r = \beta+\gamma, \quad s = \beta-\gamma$$

und wir haben daher die ϑ-Formel

$$\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)+\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)\vartheta_1(\beta+\gamma)\vartheta_1(\beta-\gamma) =$$
$$\vartheta_3(\alpha+\beta)\vartheta_3(\alpha-\beta)\vartheta_3(\beta+\gamma)\vartheta_3(\beta-\gamma)-\vartheta_2(\alpha+\beta)\vartheta_2(\alpha-\beta)\vartheta_2(\beta+\gamma)\vartheta(\beta-\gamma).$$

Beachtet man nun, dass allgemein

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)} = \sqrt{k}\cdot\operatorname{sn}u; \quad \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_0(u)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\operatorname{cn}u; \quad \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_0(u)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\operatorname{dn}u$$

ist, so lässt sich Gleichung (1.) in folgender Form schreiben

$$\sum^{4}\frac{\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)}{\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)}\left\{1+\frac{\vartheta_1(\beta+\gamma)\vartheta_1(\beta-\gamma)\vartheta_1(\gamma+\delta)\vartheta_1(\gamma-\delta)}{\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)\vartheta_0(\gamma+\delta)\vartheta_0(\gamma-\delta)}\right\} = 0$$

oder mit Rücksieht auf die obige ϑ-Formel

$$\sum^{4} \frac{\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)}{\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\vartheta_3(\beta+\gamma)\vartheta_3(\beta-\gamma)\vartheta_3(\gamma+\delta)\vartheta_3(\gamma-\delta)}{\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)\vartheta_0(\gamma+\delta)\vartheta_0(\gamma-\delta)} =$$
$$\sum^{4} \frac{\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)}{\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\vartheta_2(\beta+\gamma)\vartheta_2(\beta-\gamma)\vartheta_2(\gamma+\delta)\vartheta_2(\gamma-\delta)}{\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)\vartheta_0(\gamma+\delta)\vartheta_0(\gamma-\delta)}.$$

Geht man wieder auf elliptische Functionen zurück, so ist

$$(5.)\quad \begin{cases} \sum^{4} \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\mathrm{dn}(\beta+\gamma)\mathrm{dn}(\beta-\gamma)\mathrm{dn}(\gamma+\delta)\mathrm{dn}(\gamma-\delta) = \\ \qquad k^2 \sum^{4} \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\mathrm{cn}(\beta+\gamma)\mathrm{cn}(\beta-\gamma)\mathrm{cn}(\gamma+\delta)\mathrm{cn}(\gamma-\delta). \end{cases}$$

Die Richtigkeit der Gleichung (5.) kann an speciellen Fällen leicht erprobt werden.

Setzt man in ihr $\beta=\gamma=\delta$, so folgt nach einigen leichten Reductionen

$$\mathrm{dn}(\alpha+\beta)\mathrm{dn}(\alpha-\beta)\mathrm{dn}2\beta - k^2\mathrm{cn}(\alpha+\beta)\mathrm{cn}(\alpha-\beta)\mathrm{cn}2\beta = k'^2.$$

Vertauscht man hierin α mit β und subtrahirt beide Gleichungen, so ist

$$\mathrm{dn}(\alpha+\beta)\mathrm{dn}(\alpha-\beta)\{\mathrm{dn}2\alpha-\mathrm{dn}2\beta\} = k^2\mathrm{cn}(\alpha+\beta)\mathrm{cn}(\alpha-\beta)\{\mathrm{cn}2\alpha-\mathrm{cn}2\beta\},$$

somit

$$(6.)\qquad \frac{\mathrm{dn}(\alpha+\beta)\mathrm{dn}(\alpha-\beta)}{\mathrm{cn}(\alpha+\beta)\mathrm{cn}(\alpha-\beta)} = k^2 \frac{\mathrm{cn}2\alpha-\mathrm{cn}2\beta}{\mathrm{dn}2\alpha-\mathrm{dn}2\beta}.$$

Für $\beta=0$ folgt die leicht zu verificirende Formel

$$\frac{1-\mathrm{cn}2\alpha}{1-\mathrm{dn}2\alpha} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2\alpha}{\mathrm{cn}^2\alpha}.$$

Setzt man in (6.) $k=0$, so muss also

$$\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = (\cos2\alpha-\cos2\beta)\left\{\frac{k^2}{\mathrm{dn}2\alpha-\mathrm{dn}2\beta}\right\}_{k=0}$$

eine richtige Gleichung sein. Die Klammergrösse nimmt für $k=0$ die Form $\frac{0}{0}$ an; das gewöhnliche Verfahren liefert

$$\left(\frac{k^2}{\mathrm{dn}2\alpha-\mathrm{dn}2\beta}\right)_0 = \left[\frac{2k}{\frac{-k\mathrm{sn}^2 2\alpha}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 2\alpha}} - \frac{-k\mathrm{sn}^2 2\beta}{\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 2\beta}}}\right]_{k=0} = -\frac{2}{\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\beta}$$

und es ist in der That

$$\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = -2\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta}.$$

Vertauscht man in Gleichung (6.) α, β, k mit αi, βi, k', so folgt

$$(7.) \qquad \mathrm{dn}(\alpha+\beta)\mathrm{dn}(\alpha-\beta) = k'^2 \frac{\mathrm{cn}\,2\alpha - \mathrm{cn}\,2\beta}{\mathrm{cn}\,2\alpha\,\mathrm{dn}\,2\beta - \mathrm{cn}\,2\beta\,\mathrm{dn}\,2\alpha}.$$

Aus der Verbindung von (6.) und (7.) ergiebt sich weiter

$$(8.) \qquad \mathrm{cn}(\alpha+\beta)\mathrm{cn}(\alpha-\beta) = \frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{\mathrm{dn}\,2\alpha - \mathrm{dn}\,2\beta}{\mathrm{cn}\,2\alpha\,\mathrm{dn}\,2\beta - \mathrm{cn}\,2\beta\,\mathrm{dn}\,2\alpha}.$$

Aus Gleichung (5.) lassen sich noch mehrere ähnliche Formeln herleiten, wenn man sie erst durch Einführung imaginärer Argumente oder Vermehrung der letzteren um halbe Perioden transformirt.

Sur une forme générale des équations de la dynamique et sur le principe de *Gauss*.

(Par M. *P. Appell* à St. Germain-en-Laye.)

Nous avons dans le tome 121 de ce Journal, p. 310, publié un Mémoire ***Sur une forme générale des équations de la dynamique,*** au sujet duquel nous demandons la permission de présenter deux remarques complémentaires, l'une d'ordre mathématique, l'autre d'ordre bibliographique sur le principe de la moindre contrainte de *Gauss*.

1.

Quand les liaisons d'un système sans frottement peuvent être exprimées en termes finis et quand on emploie des paramètres qui sont de véritables coordonnées, les équations de *Lagrange* sont applicables. Supposons, pour simplifier qu'il existe une fonction des forces U. On peut alors écrire les équations du mouvement dès que l'on connaît les expressions de la demi force vive T et de U en fonction des paramètres indépendants.

Si, au contraire, les liaisons ne peuvent pas s'exprimer toutes par des relations en termes finis, on ne peut plus appliquer les équations de *Lagrange;* pour écrire les équations du mouvement il suffit de connaître U et la fonction $S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2$ composée avec les accélérations comme T avec les vitesses. Mais cela est-il nécessaire?

Ne pourrait-il pas exister des équations du mouvement, plus générales que celles de *Lagrange,* applicables à tous les cas et n'exigeant pour être écrites que la connaissance des deux fonctions T et U? Nous allons montrer que de telles équations n'existent pas. Pour cela nous indiquerons deux systèmes différents dans lesquels les fonctions T et U sont identiquement les mêmes, sans que, cependant, les équations du mouvement soient les mêmes.

Premier système. Imaginons un solide pesant qui remplisse les conditions suivantes:

1°. le solide est terminé par une arête vive ayant la forme d'un cercle K de rayon a;

2°. le centre de gravité G du corps est situé au centre du cercle K;

3°. l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G est de révolution autour de la perpendiculaire Gz au plan du cercle.

Supposons ensuite que le corps solide ainsi constitué soit assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe, qu'il touche par l'arête circulaire K.

Soit $G\alpha$ la verticale ascendante menée par G, prenons comme axe Gy la perpendiculaire au plan αGz et comme axe Gx la perpendiculaire au plan yGz : Gy est alors une horizontale du plan du cercle K et Gx une ligne de plus grande pente de ce plan aboutissant au point par lequel le cercle touche le plan fixe. Désignons par Θ l'angle de Gz avec la verticale ascendante $G\alpha$ et par ψ l'angle de Gy avec une horizontale fixe. Ces deux angles déterminent l'orientation du trièdre $Gxyz$. Pour fixer la position du corps solide par rapport au trièdre $Gxyz$, il suffit de connaître l'angle φ que fait un rayon du cercle K, invariablement lié au corps, avec l'axe Gy. La rotation instantanée ω du corps est alors la résultante de la rotation du trièdre et d'une rotation $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$ autour de Gz. Les composantes p, q, r de ω sont donc:

$$p = -\psi' \sin\Theta, \qquad q = \Theta', \qquad r = \psi' \cos\Theta + \varphi'.$$

D'autre part, la condition que le cercle K roule montre que le carré de la vitesse du centre de gravité G est $a^2(q^2+r^2)$. En définitive, en prenant la masse du corps comme unité et appelant A et C les moments d'inertie par rapport à Gx et Gz, on a

$$2T = a^2(q^2+r^2) + A(p^2+q^2) + Cr^2$$

d'où, pour l'expression définitive des fonctions T et U

$$(1.) \qquad \begin{cases} 2T = A\psi'^2 \sin^2\Theta + (A+a^2)\Theta'^2 + (C+a^2)(\psi'\cos\Theta+\varphi')^2, \\ U = -ga\sin\Theta. \end{cases}$$

Deuxième système. Soit un deuxième corps pesant, de même forme, de même rayon a et de même masse que le précédent. Imaginons que la distribution de la masse soit différente, de telle façon qu'en appelant A_1 et C_1

les moments d'inertie analogues à A et C, on ait

$$A_1 = A, \qquad C_1 = C + a^2.$$

Assujettissons ce corps aux deux liaisons suivantes: le corps touche, par l'arête circulaire K, un plan horizontal fixe P_1 sur lequel il peut glisser sans frottement; le centre de gravité G du corps glisse sans frottement sur une circonférence verticale fixe dont le rayon est a et dont le centre O est dans le plan fixe P_1.

Pour exprimer ces liaisons, prenons les mêmes axes mobiles $Gxyz$ et les mêmes notations que plus haut; appelons x_1, y_1, z_1, les coordonnées absolues du point G par rapport à deux axes Ox_1 et Oy_1, du plan P_1, et une verticale ascendante Oz_1. On peut supposer que la circonférence verticale fixe, décrite par G, est dans le plan x_1Oz_1; on a alors

$$\textit{première liaison: } z_1 = a\sin\Theta$$

$$\textit{deuxième: } y_1 = 0, \quad x_1^2 + z_1^2 = a^2,$$

d'où évidemment

$$x_1 = a\cos\Theta.$$

On a, dans ces conditions,

$$2T_1 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 + A_1(p^2+q^2) + C_1 r^2$$

ou, d'après les valeurs de x_1, y_1, z_1, A_1 et C_1,

$$(2.) \qquad \begin{cases} 2T_1 = A\psi'^2\sin^2\Theta + (A+a^2)\Theta'^2 + (C+a^2)(\psi'\cos\Theta+\varphi')^2, \\ U_1 = -ga\sin\Theta. \end{cases}$$

On voit que les fonctions T et T_1, U et U_1 sont identiques: cependant les équations du mouvement sont différentes, car les équations de *Lagrange* s'appliquent au deuxième système et ne s'appliquent pas au premier. C'est ce que nous voulions montrer.

On peut remarquer que, sur les trois équations du mouvement, deux peuvent être amenées à avoir la même forme dans les deux systèmes: en effet l'intégrale des forces vives est évidemment la même pour les deux; de plus, comme l' a déjà montré *Slesser* dans un article du Quarterly Journal of Mathematics (1873), on a le droit d'écrire pour le premier système l'équation de *Lagrange* relative à Θ, ce qu'on peut faire évidemment pour le deuxième. Mais les troisièmes équations sont différentes dans les deux mouvements: pour le deuxième système on a l'intégrale $r = r_0$ qui n'existe pas pour le premier.

Il va de soi que la différence entre les deux mouvements apparaît immédiatement si l'on forme les deux fonctions S et S_1, en appliquant les formules de notre précédent mémoire. (Voyez également Journal de Mathématiques pures et appliquées, premier fascicule 1900.)

2.

Indications bibliographiques. Nous avons, à la fin, du précédent Mémoire donné quelques indications très rapides et très incomplètes sur l'énoncé analytique du principe de ***Gauss***. Nous devons à l'obligeance de M. ***A. Mayer*** de Leipzig les renseignements historiques et bibliographiques suivants. L'énoncé analytique du principe de ***Gauss*** a déjà été indiqué par ***Jacobi*** dans une leçon qui n'a pas encore été publiée; il a été donné, indépendamment de ***Jacobi***, par ***Scheffler*** (III. Band der ***Schlömilch***schen Z., p. 197). Il se trouve reproduit dans ***Mach (Die Mechanik in ihrer Entstehung historisch-kritisch dargestellt***, Leipzig 1883), dans ***Hertz*** que nous avions cité, dans ***Boltzmann (Vorlesungen über die Principe der Mechanik***, Leipzig 1897). Enfin M. ***Willard Gibbs*** dans un beau travail: ***On the fundamental formulae of Dynamics (American Journal of Mathematics, Vol. II***, 1879) a donné, de cet énoncé analytique du principe de ***Gauss***, des applications à divers problèmes, notamment à la question de la rotation des corps solides.

Ueber die Gruppirungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung.

(Von Herrn *H. E. Timerding* in Strassburg i. E.)

Die viel bearbeitete Theorie der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung hat in jüngster Zeit Herr *Ciani* wesentlich weitergeführt,[1]) indem er, in vielen Punkten an die Untersuchungen von *de Paolis*[2]) anknüpfend, insbesondere den glücklichen Gedanken verfolgte, zur Betrachtung der Doppeltangenten die *Kummer*sche Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen heranzuziehen, wobei er sich hauptsächlich auf die grosse Arbeit von *Caporali* über diese Configuration[3]) stützte. Den zahlreichen älteren Abhandlungen, die mit denen von *Steiner, Hesse* und *Aronhold*[4]) beginnen, ist damit so viel neues Material hinzugefügt, dass es nicht aussichtslos scheint, eine möglichst vollständige und systematische Uebersicht über die verschiedenen Gruppirungen der Doppeltangenten zu versuchen. Hierbei wird es sich empfehlen, eine Unterscheidung überall durchzuführen, für die Herr *Frobenius* zuerst die treffende Bezeichnung gefunden hat,[5]) indem er die Worte syzygetisch und azygetisch gebraucht. Dieselben werden anscheinend in doppeltem Sinne angewandt, einmal als Eigenschaft einer Gruppe von

---

[1]) Rendiconti del R. Istituto Lombardo 1895, 1898. Annali di Matematica, Serie III, tomo II, 1898.

[2]) La trasformazione piana doppia di terzo ordine e la sua applicazione alle curve del quarto ordine. Memorie dell' Accademia dei Lincei, Serie III, t. II, 1878.

[3]) Memorie della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXV Memorie di Geometria, pag. 80.

[4]) *Steiner* und *Hesse* in Band 49 dieses Journals, *Aronhold* in den Monatsberichten der Berliner Akademie, Juli 1864. Wegen der Beziehungen zur Charakteristikentheorie der Thetafunctionen von drei Veränderlichen sehe man insbesondere *H. Weber*, Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht Drei. Berlin 1876.

[5]) Dieses Journal, Band 99.

Doppeltangenten, das andere Mal, um eine gegenseitige Beziehung zweier Gruppen auszudrücken. Die eine Bedeutung fliesst aber mit Nothwendigkeit aus der anderen.

Besondere Beachtung verdienen die Gruppen von Doppeltangenten, die aus ebensoviel Untergruppen bestehen, wie diese Untergruppen Linien zählen, und die sich noch auf eine zweite Art in Untergruppen von derselben Linienzahl zerlegen lassen, sodass aus jeder Untergruppe der einen Zerlegung *eine* Linie in jede Untergruppe der anderen Zerlegung eingeht und die Linien in den Untergruppen der einen Zerlegung so durch die andere Zerlegung eindeutig einander zugeordnet werden. Dies sind genau dieselben Verhältnisse, wie sie beispielsweise obwalten, wenn man als Elemente die Berührungsebenen einer quadratischen Regelfläche ansieht. Diese Ebenen lassen sich auf zwei Arten in eine Schar von Ebenenbüscheln zerlegen, jedes Ebenenbüschel der einen Schar enthält eine Ebene aus jedem Ebenenbüschel der anderen Schar, und die Ebenenbüschel der einen Schar sind durch die Ebenenbüschel der anderen Schar projectiv auf einander bezogen. Im vorliegenden Falle ist die Anzahl der Elemente stets eine endliche und zwar nothwendig eine Quadratzahl. Eine der wichtigsten dieser Gruppen bilden eben solche 16 Doppeltangenten, die, wenn man die ebene Curve vierter Ordnung als Schnittlinie einer ***Kummer***schen Fläche ansieht, die Schnitte mit den Doppelebenen dieser Fläche bilden. Ueberhaupt giebt diese Auffassung der Curve vierter Ordnung für eine Reihe der folgenden Sätze den Beweis und das tiefere Verständniss. Andere lassen sich in der ***Geiser***schen Weise*) durch die Projection der geraden Linien einer Fläche dritter Ordnung aus einem beliebigen Flächenpunkte auf eine Ebene herleiten. Diese Herleitung der einzelnen Sätze genauer zu verfolgen, wäre aber unmöglich gewesen, ohne den Umfang dieses Aufsatzes über Gebühr zu erweitern. Ueberdies lassen sich alle Sätze, die sich lediglich auf die Gruppirungen der Doppeltangenten beziehen, durch eine Art Induction erkennen, indem man die Doppeltangenten in der ***Hesse***schen Weise mit den Verbindungslinien von acht assoziirten Punkten in Beziehung bringt, ohne dass die Strenge des Nachweises dadurch leidet. Im Gegentheil lässt diese Methode die besondere Eigenart der Sätze noch klarer hervortreten.

Es bedarf zum Schlusse wohl keiner Rechtfertigung, dass das Wort

*) *Geiser* im 1. Bande der Mathematischen Annalen.

Gruppe bei diesen rein geometrischen Untersuchungen in einem anderen Sinne gebraucht wird, als es die Algebra zulässt, um so weniger als, wo der algebraische Begriff der Gruppe in die Geometrie eintritt, er sich immer unter diesen allgemeineren subsumiren lässt.

1.

Aus den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung lassen sich 378 Paare bilden. Diese 378 Paare theilen sich aber in 63 Gruppen von je 6 Paaren, die als zerfallende Curven demselben Netze von Kegelschnitten angehören. Eine solche Gruppe von sechs Paaren wollen wir eine *Steiner*sche Paarsechs nennen.

Die Berührungspunkte von je zwei Paar Doppeltangenten derselben Paarsechs liegen auf einem Kegelschnitte. Also liegen die sechs Berührungspunkte von drei Doppeltangenten auf einem Kegelschnitte, wenn zwei derselben ein Paar in einer Paarsechs bilden und derselben Paarsechs die dritte Doppeltangente angehört. Greift man aber aus einer Paarsechs drei Doppeltangenten heraus, von denen in ihr keine zwei ein Paar bilden, so liegen deren Berührungspunkte auch nie auf einem Kegelschnitte.

Im ersteren Falle heisst nach *Frobenius* das Tripel der Doppeltangenten syzygetisch, im letzteren Falle azygetisch.

(1.) Mit zwei gegebenen Doppeltangenten bilden 10 andere ein syzygetisches und 16 ein azygetisches Tripel. Die ersteren 10 Doppeltangenten bilden mit den beiden gegebenen die Paarsechs, der diese als ein Paar angehören. Von den letzteren 16 Doppeltangenten aber bildet jede ein azygetisches Tripel mit allen Paaren dieser Paarsechs.

Es giebt sonach 1260 syzygetische und 2016 azygetische Tripel.

Man nennt allgemeiner azygetisch eine Gruppe von Doppeltangenten, wenn von keinen drei unter ihnen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen, wenn sie also, zu dreien zusammengefasst, lauter azygetische Tripel bilden.

(2.) Eine azygetische Gruppe kann höchstens aus 7 Doppeltangenten bestehen. Durch solche 7 Doppeltangenten ist die Curve vierter Ordnung eindeutig bestimmt, und aus ihnen lassen sich die übrigen

21 Doppeltangenten linear ableiten. Eine solche Gruppe heisst nach ihrem Entdecker eine *Aronhold*sche Sieben. Es giebt deren 288.

Für die azygetischen Gruppen von geringerer Linienzahl gilt der Satz:

(3.) Eine Gruppe von 3 bis 6 Doppeltangenten aus einer Paarsechs ist dann und nur dann azygetisch, wenn sie kein Paar dieser Paarsechs enthält.

Zwei Paarsechs haben entweder vier oder sechs Doppeltangenten mit einander gemein. Im letzteren Falle bilden die 12 Doppeltangenten aus ihnen beiden, welche sie nicht gemein haben, eine neue Paarsechs, und wir nennen das Tripel dieser Paarsechs, ebenso wie irgend zwei von ihnen, *azygetisch.* Im ersteren Falle enthält noch eine dritte Paarsechs dieselben vier Doppeltangenten, welche die ersten beiden gemein haben, und wir sprechen dann von einem *syzygetischen* Paarsechstripel. In einem solchen sind immer alle 28 Doppeltangenten enthalten. Aus vier syzygetischen Doppeltangenten lassen sich auf drei Arten zwei Paare bilden, die jedesmal *einer* Paarsechs angehören. Die drei Paarsechs, die man so erhält, bilden das entsprechende syzygetische Tripel.

Liegt nun eine Paarsechs vor, und man greift aus ihr irgend zwei Paare heraus, so findet man zu dem syzygetischen Quadrupel, das sie bilden, noch zwei Paarsechs, die mit der vorgelegten Paarsechs ein syzygetisches Paarsechstripel ausmachen. Diese beiden Paarsechs theilen aber die 16 Doppeltangenten, die nach Ausschluss der ersten Paarsechs übrig bleiben und die wir als eine *Kummer*sche Gruppe bezeichnen wollen, in zwei Hälften.

(4.) Die 16 Doppeltangenten einer *Kummer*schen Gruppe lassen sich auf 15 verschiedene Arten in zweimal 8 zerfällen, die durch dasselbe syzygetische Quadrupel aus der zugehörigen Paarsechs zu je einer neuen Paarsechs ergänzt werden, so dass die drei Paarsechs zusammen ein syzygetisches Tripel bilden.

Diesem Satze lässt sich noch eine andere bemerkenswerthe Form geben:

(5.) Sucht man in einer *Kummer*schen Gruppe die Doppeltangenten auf, welche zwei, nicht als ein Paar zusammengehörige Doppeltangenten der entsprechenden Paarsechs zu einem syzygetischen oder azygetischen Tripel ergänzen, so zerfällt die Gruppe auf diese Weise in zweimal 8 Doppeltangenten. Diese Zerfällung ist

aber dieselbe für alle vier Paare, die sich aus einem syzygetischen Quadrupel der Paarsechs, ausser den Paaren dieser Paarsechs selbst, bilden lassen, und zwar werden zwei Paare, die zusammen das ganze Quadrupel erschöpfen, durch *dieselben* Doppeltangenten zu syzygetischen oder azygetischen Tripeln ergänzt, von zwei Paaren aber, die eine Doppeltangente gemein haben, wird durch dieselbe neue Doppeltangente das eine zu einem azygetischen, das andere zu einem syzygetischen Tripel ergänzt.

So erhält man 15 Zerfällungen der *Kummer*schen Gruppe in zweimal 8, welche mit denen des vorigen Satzes identisch sind.

Liegt ein syzygetisches Paarsechstripel vor, so gehört jedes syzygetische Quadrupel, dessen Doppeltangenten alle nur in einer der drei Paarsechs enthalten sind, noch zu zwei weiteren Paarsechs, die wieder mit den übrigen beiden Paarsechs des vorgelegten Paarsechstripels je vier Doppeltangenten gemein haben und zusammen von ihnen alle Linien mit Ausnahme der gemeinsamen Doppeltangenten enthalten. Zu jedem syzygetischen Paarsechstripel gehören so zwölf weitere Paarsechs, die mit jeder Paarsechs des Tripels ein Quadrupel gemein haben, und jedes syzygetische Quadrupel, das zu einer und nur zu einer Paarsechs des Tripels gehört, ist zugleich in zweien dieser zwölf neuen Paarsechs enthalten.

Wenn man nun zu drei syzygetischen Quadrupeln, die zusammen eine Paarsechs bilden, jedesmal noch die übrigen beiden Paarsechs aufsucht, in denen sie enthalten sind, so sind alle diese Paarsechs syzygetisch, und zwar haben sie zu je dreien dasselbe syzygetische Quadrupel gemein. Denn die dritte Paarsechs, die das irgend zweien der sechs Paarsechs gemeinsame Quadrupel enthält, muss auch eines der vorgelegten drei Quadrupel in sich begreifen, also selbst zu den sechs Paarsechs gehören.

(6.) Die 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung lassen sich auf 135 Arten in 7 syzygetische Quadrupel zerlegen, so dass zu jeder Paarsechs, die zwei dieser Quadrupel enthält, auch noch ein drittes derselben gehört. Solcher Paarsechs giebt es jedesmal 7. Sie bilden lauter syzygetische Paarsechstripel, derart, dass zu ihnen auch immer noch die dritte Paarsechs gehört, die das irgend zweien von ihnen gemeinsame Quadrupel enthält. Jedes der 7 syzygetischen Quadrupel bildet die Basis eines dieser syzygetischen Paarsechstripel.

Folgendes ist nur eine andere Formulirung desselben Satzes:

(7.) Die 16 Doppeltangenten einer *Kummer*schen Gruppe lassen sich auf 15 verschiedene Arten in vier syzygetische Quadrupel zerfällen, entsprechend den 15 Arten, auf die sich die zugehörige Paarsechs in drei syzygetische Quadrupel zertheilen lässt. Fasst man bei jeder Zerfällung die vier Quadrupel der *Kummer*schen Gruppe paarweise zusammen, was jedesmal auf drei Arten geschehen kann, so bilden diese Quadrupelpaare zusammen mit einem und demselben Quadrupel der zu der *Kummer*schen Gruppe gehörigen Paarsechs je eine neue Paarsechs.

Indem man in der eben angegebenen Weise die syzygetischen Quadrupel in einer *Kummer*schen Gruppe zu zweien zusammennimmt, gelangt man wieder zu den Zerfällungen dieser Gruppe in zweimal acht, oder wie wir sagen wollen, in zwei Paarvier. So erhält man aus jeder Zerfällung in Quadrupel drei Zerfällungen in Paarvier, aber andererseits gehören zu jeder dieser Zerlegungen in Paarvier drei Zerlegungen in syzygetische Quadrupel, entsprechend den drei Arten, auf die sich aus vier Paaren einer Paarsechs zwei syzygetische Quadrupel bilden lassen.

Nennen wir zwei *Kummer*sche Gruppen, die sich aus den 28 Doppeltangenten herausheben lassen, syzygetisch, wenn sie acht Doppeltangenten gemein haben, so sind sie dann und nur dann syzygetisch, wenn ihre zugehörigen Paarsechs es sind. Zu jeder Paarsechs sind aber 30 andere syzygetisch, die paarweise mit der ersten Paarsechs dasselbe Quadrupel gemein haben. Daraus folgt:

(8.) Zu jeder vorgelegten *Kummer*schen Gruppe unter den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung sind 30 andere solche Gruppen syzygetisch, die paarweise so zusammentreten, dass jeder Zerlegung der vorgelegten Gruppe in zwei Paarvier ein derartiges Gruppenpaar entspricht, indem jede der beiden Paarvier mit denselben vier Paaren aus der nach Ausschluss der vorgelegten Gruppe übrig bleibenden Paarsechs eine *Kummer*sche Gruppe des Paares bildet.

Von diesem Paare *Kummer*scher Gruppen können wir sagen, dass es mit der vorgelegten Gruppe ein syzygetisches Tripel von *Kummer*schen Gruppen bildet.

(9.) Aus drei Paarvier, d. h. Gruppen von vier Paaren derselben Paarsechs, lassen sich, wofern sie, auch zu zweien, keine einzige Doppeltangente gemein haben, drei *Kummer*sche Gruppen bilden, indem man die Paarvier zu zweien zusammennimmt. Diese drei *Kummer*schen Gruppen bilden ein syzygetisches Tripel. Sie erschöpfen alle Doppeltangenten bis auf ein syzygetisches Quadrupel, und zu jedem solchen Quadrupel gehört so ein einziges Tripel von *Kummer*schen Gruppen. Es giebt dieser Tripel sonach 315.

Als Corollar können wir den Satz hinzufügen:

(10.) Die 16 Doppeltangenten, die von zwei syzygetischen Paarsechs nach Ausschluss ihrer gemeinsamen Linien übrig bleiben, bilden immer eine *Kummer*sche Gruppe.

Endlich ergeben sich noch die Sätze:

(11.) Es existiren 60 syzygetische Paarsechstripel, die irgend ein Quadrupel aus einer vorgelegten *Kummer*schen Gruppe zur Basis haben. Aus jeder Paarsechs eines solchen Tripels gehören zwei Paare von den in ihr allein enthaltenen Doppeltangenten zur *Kummer*schen Gruppe selbst, die anderen zwei Paare zu der zugeordneten Paarsechs. Es gehören sonach von dem Paarsechstripel ausser seiner Basis zu der *Kummer*schen Gruppe sechs Paar Doppeltangenten, und die Punkte, in denen die Linien dieser einzelnen Paare sich durchschneiden, bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten *Aronhold*sche Linien sind, indem auf ihnen sich je drei Paar Doppeltangenten durchschneiden, so dass zu jedem syzygetischen Quadrupel der *Kummer*schen Gruppe ein Vierseit von *Aronhold*schen Linien gehört und zu der ganzen Gruppe 240 solche Linien.

(12.) Die viermal vier *Aronhold*schen Linien, welche so einer Zerfällung der *Kummer*schen Gruppe in vier syzygetische Quadrupel entsprechen, bilden immer eine neue *Kummer*sche Gruppe, nämlich vier syzygetische Quadrupel von Doppeltangenten einer neuen Curve vierter Ordnung, deren letzte 12 Doppeltangenten eine Paarsechs darstellen.

Die 240 *Aronhold*schen Linien einer *Kummer*schen Gruppe zerfallen also in 15 neue *Kummer*sche Gruppen.

2.

Eine Paarsechs lässt sich auf 32 verschiedene Arten in zwei azygetische Sextupel zerfällen. Hierzu nämlich ist erforderlich und hinreichend, dass bei der Zerfällung von keinem Paare der Paarsechs die Doppeltangenten beisammen bleiben. Die 32 Eintheilungen sondern sich aber in zwei streng geschiedene Gruppen von je 16. Wir haben nämlich zwei Arten von azygetischen Sextupeln zu unterscheiden, die wir der Kürze halber als ***Sechs*** und ***Schar*** charakterisiren wollen.

(13.) Als eine Schar bezeichnen wir solche sechs Doppeltangenten, die einen Kegelschnitt berühren. Ihre 12 Berührungspunkte mit der Curve vierter Ordnung liegen immer auf einer Curve dritter Ordnung, die nach einem Satze von ***Frobenius*** auch durch die Berührungspunkte der sechs Doppeltangenten mit dem Kegelschnitte hindurchgeht.

(14.) Die 1008 Scharen von Doppeltangenten, die es giebt, sind zu dreien einander zugeordnet, so dass von drei zusammengehörigen Scharen je zwei eine Paarsechs bilden. Umgekehrt bestimmt jedes azygetische Paarsechstripel drei Scharen von Doppeltangenten, indem die Paarsechs dieselben zu zweien gemein haben. Die 18 Doppeltangenten eines solchen Scharentripels zerfallen aber auch in 6 Linientripel, so dass jede der drei zugehörigen Paarsechs aus allen Tripeln ein Paar enthält. Wir wollen diese Gruppe von 18 Doppeltangenten darum eine ***Dreisechs*** nennen.

(15.) Zu jeder Sechs von Doppeltangenten gehört eine andere Sechs, die mit der ersten zusammen alle Doppeltangenten einer Paarsechs enthält und mit ihr eine Doppelsechs bildet. Beide Sechs der Doppelsechs werden durch eine und dieselbe Doppeltangente zu je einer ***Aronhold***schen Sieben ergänzt. Umgekehrt erhält man aus jeder ***Aronhold***schen Sieben eine Sechs, indem man irgend eine ihrer Doppeltangenten weglässt. Die Zahl der Sechs ist sonach das Siebenfache von der Zahl der ***Aronhold***schen Sieben, also 2016.

Zu jeder ***Aronhold***schen Sieben gehören 7 andere, die man aus der ersten erhält, indem man eine Doppeltangente unverändert lässt und die übrig bleibende Sechs durch die zugehörige Sechs

(die mit ihr eine Doppelsechs bildet) ersetzt. Auf diese Weise zerfallen die 288 *Aronhold*schen Sieben in 36 Oktupel.

(16.) Keine Schar gehört ganz einer *Aronhold*schen Sieben an, aber je fünf Doppeltangenten aus einer Schar bestimmen eindeutig eine *Aronhold*sche Sieben, indem sie zu einer solchen durch ein bestimmtes Paar von Doppeltangenten ergänzt werden. Die sechs Paare, welche so zu einer Schar hinzutreten, indem sie mit je fünf Linien derselben eine *Aronhold*sche Sieben bilden, stellen aber eine Paarsechs dar, und zwar diejenige Paarsechs, durch welche die Schar zu einer Dreisechs ergänzt wird.

Aus einer Paarsechs geht durch jede Zerfällung in zwei Sechs eine Doppelsechs und durch jede Zerspaltung in zwei Scharen eine Doppelschar hervor.

(17.) Die Sechs zweier Doppelsechs, welche aus derselben Paarsechs gebildet sind, haben paarweise vier und paarweise zwei Doppeltangenten gemein, und gleiches gilt von den Scharen zweier Doppelscharen, die aus derselben Paarsechs hervorgegangen sind.

Die Sechs einer Doppelsechs und die Scharen einer Doppelschar, die aus derselben Paarsechs erzeugt sind, haben mit einander paarweise eine und paarweise fünf Doppeltangenten gemein, oder sie haben jedesmal drei Linien gemein.

(18.) Um aus einer Doppelsechs die anderen 15 Doppelsechs zu bekommen, welche dieselben 12 Doppeltangenten enthalten, vertausche man irgendwie zwei Doppeltangenten ihrer einen Sechs mit den homologen Linien der anderen Sechs. Vertauscht man irgend eine oder irgend drei Doppeltangenten der einen Sechs mit den entsprechenden der anderen Sechs, so erhält man die zugehörigen 16 Doppelscharen.

a. Eine Sechs von Doppeltangenten bestimmt eine *Kummer*sche Gruppe. Diese Gruppe nämlich bleibt übrig, wenn man von den 28 Doppeltangenten die vorgelegte Sechs und die andere, welche mit ihr eine Doppelsechs bildet, fortnimmt. Bezeichnet man nun die Linien der Sechs der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 6, so giebt es zunächst eine bestimmte Doppeltangente (0) in der *Kummer*schen Gruppe, die zusammen mit der Sechs, oder der sie zu einer Doppelsechs ergänzenden anderen Sechs, eine *Aronhold*sche Sieben bildet. Die übrigen 15 Doppeltangenten der *Kummer*schen

Gruppe gehören auf die gleiche Weise zu den 15 Doppelsechs, welche dieselben Doppeltangenten wie die erste Doppelsechs enthalten, und können mit je zwei der Zahlen 1 bis 6 bezeichnet werden, die dann angeben, welche Linien der vorgelegten Sechs mit den homologen der zugeordneten Sechs vertauscht werden müssen, um die entsprechende neue Doppelsechs zu gewinnen.

Unter den 16 Doppeltangenten der *Kummer*schen Gruppe berühren 16 Scharen von sechs Linien je einen Kegelschnitt. Jede dieser Scharen gehört einer Dreisechs an, die unter ihren 18 Doppeltangenten auch die Linien der vorgelegten und ihrer zugeordneten Sechs enthält. Zwei Scharen dieser Dreisechs bekommt man, indem man irgendwie ein oder drei Paar homologe Linien der beiden Sechs vertauscht, und die 16 Kegelschnitte der *Kummer*schen Gruppe lassen sich sonach durch eine oder drei der Zahlen 1 bis 6 bezeichnen, indem im letzteren Falle die übrig bleibenden drei Zahlen jedesmal denselben Kegelschnitt darstellen.

b. Mit Hülfe der Zahlen 1 bis 6, die einer Sechs zugeschrieben werden, lassen sich auch alle Doppeltangenten bis auf eine charakterisiren. Die ausgezeichnete Doppeltangente (0) ist die, welche die vorgelegte Sechs zu einer *Aronhold*schen Sieben vervollständigt. Jede Linie der dieser Sechs zugeordneten zweiten Sechs berührt mit den fünf ihr nicht homologen Linien jener ersten Sechs denselben Kegelschnitt und lässt sich durch die fünf Symbole dieser Linien festlegen. Von den noch übrigen 15 Doppeltangenten ist aber schon gezeigt, wie sie sich durch je zwei der Zahlen 1 bis 6 charakterisiren lassen. Irgend eine von ihnen, etwa (12), bildet mit (1) und der zu (2) zugeordneten Doppeltangente der zweiten Sechs oder mit (2) und der zu (1) zugeordneten Doppeltangente ein syzygetisches Tripel, das allemal durch die ausgezeichnete Doppeltangente zu einem syzygetischen Quadrupel ergänzt wird. Solcher Tripel giebt es 45, sie gehören als zerfallende Curven einem syzygetischen Complexe von kubischen Berührungscurven an, nämlich von solchen Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung alle in sechs Punkten eines Kegelschnittes berühren. Von den 45 Linientripeln selbst kann man sagen, dass sie einen ***syzygetischen Tripelcomplex*** bilden.

c. Um nun aber zu einer duadischen Bezeichnung aller Doppeltangenten zu gelangen, füge man zwei Zeichen, etwa 7 und 8, hinzu, gebe das eine den Linien der vorgelegten Sechs, das andere denen der zugeordneten

Sechs, so dass z. B. (17) und (18) entsprechende Linien in beiden Sechs sind. Der vorher mit (0) charakterisirten Doppeltangente ertheile man das Symbol (78) und die übrigen 15 Linien bezeichne man wie früher. Die Doppeltangenten, welche auf diese Weise durch je zwei von irgend drei der Zahlen 1 bis 8, z. B. (12), (23), (31), charakterisirt werden, bilden im ganzen 56 azygetische Tripel, einen *azygetischen Tripelcomplex*. Denn diese Tripel bilden die ganz zerfallenden Curven in einem azygetischen Complexe von kubischen Berührungscurven, nämlich von solchen Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung sechsfach, aber *nie* in sechs Punkten eines Kegelschnittes, berühren.

Zu diesem Complexe gehören acht bestimmte *Aronhold*sche Sieben, die ein Oktupel darstellen (15). Je zwei Doppeltangenten von einer derselben bilden mit einer bestimmten aus den 21 übrigen Doppeltangenten eine zerfallende Curve des Complexes. Die Linien einer beliebigen dieser Sieben zeigen in ihrer duadischen Bezeichnung alle eine gemeinsame Zahl.

Man sieht hieraus, dass sich die Doppeltangenten auf 36 verschiedene Arten in der angegebenen Weise bezeichnen lassen und ohne, wie *Hesse* es thut, auf ihre Beziehung zu den Verbindungslinien von acht associirten Punkten im Raume einzugehen, kann man sie durch die 28 Verbindungsstrecken von 8 beliebig in der Ebene gewählten Punkten in der *Cayley*schen Weise*) rein schematisch darstellen, indem man die beizufügenden Zahlen weglässt, wo es sich bloss um die Angabe der gegenseitigen Lagenbeziehungen dieser Strecken handelt. Eine solche Darstellung empfiehlt sich durchgehends, und man kann die verschiedenen Typen, die sich hierbei darbieten, wenn sie auch nur in dieser Darstellung und nicht in Wirklichkeit unterschieden sind, ruhig sondern, indem man sich doch andererseits, wegen der verschiedenen möglichen Darstellungen, öfters erlaubt, sich auf die Betrachtung eines besonders bequemen Typus zu beschränken und von ihm auf die anderen zu schliessen.

3.

Jedes azygetische Quadrupel wird durch zwei azygetische Tripel zu einer *Aronhold*schen Sieben ergänzt. Die Linien dieser beiden Tripel bilden zusammen drei Paare einer *Steiner*schen Paarsechs und sollen eine Paardrei genannt werden.

*) *Cayley*, dieses Journal, Band 68, 87.

Eine Paardrei lässt sich auf vier Arten in zwei azygetische Tripel zerlegen, oder wie wir dafür sagen wollen, aus einer Paardrei lassen sich vier verschiedene Doppeldrei bilden. Entsprechend einer jeden dieser vier Zerlegungen lässt sich der Paardrei ein azygetisches Quadrupel zuordnen, das mit beiden Tripeln der Doppeldrei je eine *Aronhold*sche Sieben bildet. Diese vier azygetischen Quadrupel, welche sonach zu jeder Paardrei gehören, stellen eine *Kummer*sche Gruppe dar, die so in vier azygetische Quadrupel zerlegt ist.

Zu jeder Paardrei gehört eine bestimmte andere Paardrei, welche die erste zu einer Paarsechs ergänzt. Zu dieser zweiten Paardrei findet man dieselbe *Kummer*sche Gruppe, und die entsprechende zweite Zerlegung der letzteren in vier azygetische Quadrupel ist so geartet, dass jedes neue Quadrupel aus jedem der alten Quadrupel eine einzige Linie enthält. Eine solche doppelte Zerfällung der *Kummer*schen Gruppe in viermal vier Linien wollen wir eine Viervier nennen.

(19.) Aus jeder *Kummer*schen Gruppe lassen sich 10 Viervier bilden, entsprechend den 10 Arten, auf die sich die zugehörige Paarsechs in zwei Paardrei theilen lässt. Den beiden Paardrei entsprechen nämlich zwei zusammengehörige Zerfällungen der *Kummer*schen Gruppe in vier azygetische Quadrupel, und zwar ist beidemal jedes Quadrupel mit einer bestimmten der vier Doppeldrei, die sich aus der zugehörigen Paardrei bilden lassen, so verbunden, dass es mit beiden Tripeln der Doppeldrei je eine *Aronhold*sche Sieben bildet.

(20.) Wird die *Kummer*sche Gruppe auf eine dieser 20 Arten in vier azygetische Quadrupel getheilt, so berühren die Diagonalen der vier Vierseite, welche diese Quadrupel bilden, eine und dieselbe Curve dritter Klasse.

Greift man von den drei Paarsechs eines syzygetischen Tripels irgend zwei heraus und lässt von ihnen das gemeinsame Quadrupel fort, so lassen sich die von jeder übrig bleibenden acht Doppeltangenten auf vier Arten in zwei azygetische Quadrupel zerlegen, die jedesmal von einem und demselben Paare aus der dritten Paarsechs des Tripels zu einer Schar ergänzt werden. Die zweimal acht Doppeltangenten bilden aber die beiden Hälften einer *Kummer*schen Gruppe, welche sonach auf ***vier*** Arten derart weiter zerlegt werden können, dass wir zu einer azygetischen Quadrupelzerfällung der *Kummer*schen Gruppe gelangen, während wir früher sahen, dass sie auf *drei*

Arten so weiter zerlegt werden können, dass wir eine syzygetische Quadrupelzerfällung erhalten.

(21.) Wenn ein azygetisches Quadrupel mit beiden azygetischen Tripeln einer Doppeldrei je eine *Aronhold*sche Sieben bildet, so bildet es mit jedem Paar zusammengehöriger Linien der Doppeldrei eine Schar, nämlich sechs Doppeltangenten, die einen Kegelschnitt berühren.

(22.) Irgend zwei von vier azygetischen Quadrupeln, die zusammen eine *Kummer*sche Gruppe ausmachen, gehören derselben Paarsechs an, und diese ist zu der Paarsechs, der die übrigen beiden Quadrupel angehören, syzygetisch. Die dritte Paarsechs, die mit diesen beiden ein syzygetisches Tripel bildet, ist diejenige, welche der *Kummer*schen Gruppe zugeordnet ist, und das gemeinsame Quadrupel aller drei Paarsechs gehört derjenigen Paardrei an, welcher diese Quadrupelzerlegung der *Kummer*schen Gruppe entspricht.

(23.) Die acht azygetischen Tripel, die sich aus einer gegebenen Paardrei bilden lassen, zerfallen in zwei Gruppen von je vier Tripeln, so dass zwei Tripel derselben Gruppe immer *eine*, zwei Tripel aus verschiedenen Gruppen *zwei* Linien gemein haben, wenn sie nicht alle Linien der Paardrei erschöpfen und eine Doppeldrei bilden. Jede Gruppe von vier Tripeln gehört dann aber zu einem azygetischen Tripelcomplex (vgl. oben 2, c), und man findet zu jeder Paardrei ein Paar von solchen Complexen. Zu associirten Paardrei, die sich zu einer Paarsechs ergänzen, gehört aber dasselbe Paar von azygetischen Tripelcomplexen.

Zerlegt man ein azygetisches Quadrupel auf eine der drei möglichen Arten in zwei Paare, so gehören dieselben zwei verschiedenen Paarsechs an. Diese beiden Paarsechs und diejenige, von der die zu dem azygetischen Quadrupel gehörige Doppeldrei einen Theil bildet, stellen ein syzygetisches Paarsechstripel dar. Sondert man das gemeinsame syzygetische Quadrupel und das vorgelegte azygetische Quadrupel von den ersten beiden Paarsechs ab, so bleibt von jeder eine Paardrei übrig. Diese beiden Paardrei zerlegen sich aber mit Hülfe der Doppeldrei, welche zu dem azygetischen Quadrupel gehört, auf bestimmte Art in azygetische Tripel, die mit jedem Tripel der Doppeldrei je eine neue Doppeldrei bilden. Man hat so im ganzen

sechs azygetische Tripel vor sich, von denen beliebige zwei eine Doppeldrei bilden. Eine solche Gruppe werde von uns eine ***Dreisechs*** genannt.

(24.) Jedes azygetische Tripel gehört zu einer und nur zu einer Dreisechs. Von den fünf Tripeln, die es zu je einer Doppeldrei ergänzen, bilden auch beliebige zwei eine Doppeldrei. Da es 2016 azygetische Tripel giebt, giebt es sonach 336 Dreisechs.

Jede Dreisechs lässt sich auf eine einzige Art in drei Scharen zerfällen, die paarweise die Paarsechs eines azygetischen Paarsechstripels bilden. Von jedem Tripel der Dreisechs gehört zu jeder der drei Scharen eine Linie (vergl. (14.)).

(25.) Die Quadrupel, welche die 15 Doppeldrei einer Dreisechs zu *Aronhold*schen Sieben ergänzen, gehören immer nur den nach Ausschluss der Dreisechs übrig bleibenden 10 Linien an und stellen sämmtliche azygetische Quadrupel dar, die sich aus diesen 10 Linien bilden lassen.

Solche 10 Linien sollen eine *Caporali*sche Gruppe heissen.

(26.) Zwei *Kummer*sche Gruppen wollen wir azygetisch nennen, wenn sie 10 Doppeltangenten gemein haben. Denn dann sind die zu ihnen gehörigen Paarsechs azygetisch. Ihre 10 gemeinsamen Doppeltangenten bilden immer eine *Caporali*sche Gruppe.

(27.) Die drei Doppeldrei, in die sich eine Dreisechs auf 15 Arten zerlegen lässt, gehören zu je einer Paarsechs, diese drei Paarsechs bilden jedesmal ein syzygetisches Tripel und haben alle drei ein syzygetisches Quadrupel gemein. Die 15 syzygetischen Quadrupel, welche man so erhält, gehören immer nur der nach Ausschluss der Dreisechs verbleibenden *Caporali*schen Gruppe an, und mehr syzygetische Quadrupel sind in dieser nicht enthalten.

Ist umgekehrt ein syzygetisches Paarsechstripel vorgelegt, so kann man aus den vier Paaren, die nur in einer der drei Paarsechs enthalten sind, irgend drei herausgreifen, und ebenso aus den vier Paaren, die allein der zweiten Paarsechs angehören; dann finden sich drei bestimmte Paare, die nur zu der dritten Paarsechs gehören; so dass alle drei Paardrei zusammen eine Dreisechs bilden. Auf solche Art lassen sich aus einem syzygetischen Paarsechstripel 16 verschiedene Dreisechs ableiten.

Die drei Paar Doppeltangenten, welche von dem Paarsechstripel nach Ausschluss einer dieser Dreisechs und des gemeinsamen Quadrupels übrig

bleiben, bilden eine besondere Gruppe, die wir eine *de Paolissche Zweidrei* nennen wollen.

Es bilden also immer die sechs Doppeltangenten, die von einer *Caporali*schen Gruppe nach Ausschluss eines syzygetischen Quadrupels übrig bleiben, eine *de Paolis*sche Zweidrei.

(28.) Aus jedem syzygetischen Paarsechstripel lassen sich 16 *de Paolis*sche Zweidrei herleiten. Man greife nämlich aus den nicht gemeinsamen Paaren von zweien der drei Paarsechs je ein Paar heraus, dann findet sich ein bestimmtes Paar in der dritten Paarsechs, das mit ihnen eine *de Paolis*sche Zweidrei bildet.

(29.) Die sechs Doppeltangenten einer *de Paolis*schen Zweidrei durchschneiden sich in drei Punkten einer geraden, nämlich einer *Aronhold*schen Linie. (Ihre sechs Paar Berührungspunkte mit der Curve vierter Ordnung liegen auf einer Curve dritter Ordnung, die auch durch die drei Schnittpunkte auf der *Aronhold*schen Linie geht.) Es giebt 5040 *de Paolis*sche Zweidrei und ebensoviele *Aronhold*sche Linien.

Jeder *de Paolis*schen Zweidrei ist das gemeinsame Quadrupel des syzygetischen Paarsechstripels, aus dem sie sich herleiten lässt, in gewisser Weise zugeordnet. Diese Zuordnung ergiebt sich wie folgt:

(30.) Aus der *de Paolis*schen Zweidrei lassen sich 8 syzygetische Tripel herausheben. Zu jedem Paare der Zweidrei gehört immer *eine* Linie eines solchen Tripels. Die acht Tripel sind paarweise derart einander associirt, dass je zwei associirte Tripel alle sechs Linien der Zweidrei erschöpfen und durch dieselbe vierte Doppeltangente zu je einem syzygetischen Quadrupel ergänzt werden. Die vier Doppeltangenten, die so zu den Tripeln hinzutreten, bilden das der Zweidrei zugeordnete syzygetische Quadrupel.

Je zwei associirte Tripel der Zweidrei und die drei Linien, welche sie von dem zugeordneten Quadrupel *nicht* zu syzygetischen Quadrupeln ergänzen, bilden drei Dreiecke, diese drei Dreiecke sind zu einander perspectiv und die Ecken je zweier von ihnen liegen auf einem Kegelschnitte.

Von den Doppeltangenten, welche die Seiten solcher drei Dreiecke sind, wollen wir sagen, sie bilden eine *Cianische Dreidrei*. Dann zeigt sich zunächst:

(31.) Jede *Cianis*che Dreidrei wird durch eine bestimmte Doppeltangente zu einer *Caporali*schen Gruppe von 10 Doppeltangenten ergänzt, aber umgekehrt findet man auch immer eine Dreidrei, wenn man von den Linien einer *Caporali*schen Gruppe irgend eine weglässt.

(32.) Wenn drei aus Doppeltangenten gebildete Dreiecke zu einander perspectiv sind, so dass die homologen Ecken von allen dreien auf je einer *Aronhold*schen Linie liegen und diese drei *Aronhold*schen Linien sich in einem „*Geiser*schen" Punkte durchschneiden, dann bilden die homologen Seiten dieser drei Dreiecke drei neue Dreiecke, die ebenfalls perspectiv sind. Jede *Cianis*che Dreidrei lässt sich sonach auf doppelte Weise in drei perspective Dreiecke zerlegen, so dass jedesmal die homologen Linien der einen Zerlegung die Dreiecke der anderen Zerlegung bilden.

Zu jeder *Cianis*chen Dreidrei gehören zwei bestimmte *Geiser*sche Punkte, mit denen beidemal die homologen Ecken der drei Dreiecke auf je einer *Aronhold*schen Linie liegen, und die sämmtlichen *Geiser*schen Punkte werden so durch die verschiedenen Dreidrei paarweise einander conjugirt.

(33.) Die zweimal drei perspectiven Dreiecke, die sich aus einer Dreidrei bilden lassen, stellen *syzygetische* Tripel von Doppeltangenten dar und werden durch *dieselbe* Doppeltangente zu syzygetischen Quadrupeln ergänzt. Dies ist die Doppeltangente, welche die Dreidrei zu einer *Caporali*schen Gruppe vervollständigt.

(34.) Zu jeder Dreidrei gehören *sechs de Paolis*sche Zweidrei, und umgekehrt gehört jede Zweidrei zu *vier* Dreidrei, indem sie durch jedes Tripel aus einem bestimmten syzygetischen Quadrupel zu einer Dreidrei ergänzt wird. Zu jeder *de Paolis*schen Zweidrei gehören *vier Geiser*sche Punkte, diese sind die Projectionscentren der vier Paare perspectiver Dreiecke, die sich aus ihr bilden lassen. Die 12 Schnittpunkte ihrer 6 Linien, die nicht auf der zugeordneten *Aronhold*schen Linie liegen, vertheilen sich paarweise auf die Seiten des Vierecks, das die zugehörigen vier *Geiser*schen Punkte bilden. Die zu den letzteren conjugirten *Geiser*schen Punkte liegen auf der *Aronhold*schen Linie, die zu der Zweidrei gehört.

(35.) Während durch jeden *Geiser*schen Punkt drei *Aronhold*sche

Linien gehen, liegen umgekehrt auf jeder *Aronhold*schen Linie vier *Geiser*sche Punkte. Es giebt 5040 *Aronhold*sche Linien und 6720 *Geiser*sche Punkte, die paarweise zu derselben Dreidrei gehören, also 3360 *Cianis*che Dreidrei.

(36.) Jedes azygetische Quadrupel von Doppeltangenten bildet ein Vierseit, dessen drei Diagonalen *Aronhold*sche Linien sind. Auf jeder derselben durchschneidet sich noch ein Paar von Doppeltangenten, und die so erhaltenen drei Paare bilden diejenige Paardrei, die das azygetische Quadrupel zu einer *Caporali*schen Gruppe ergänzt.

(37.) Jede *Cianis*che Dreidrei lässt sich auch auf doppelte Weise in drei azygetische Tripel zerlegen, und zwar gehört von jedem Tripel der einen Zerlegung *eine* Linie zu jedem Tripel der anderen Zerlegung. Beidemale lässt sich die Dreidrei durch Hinzufügung von drei weiteren azygetischen Tripeln zu einer Dreisechs ergänzen. Jede Dreidrei gehört also zu zwei verschiedenen Dreisechs.

Die zweimal drei Tripel, welche man zu der Dreidrei hinzugefügt hat, stellen zwei neue Dreidrei dar. Zerlegt man jede derselben auf die zweite mögliche Art in drei azygetische Tripel, so erhält man im ganzen sechs neue Tripel, die wieder eine Dreisechs bilden.

So findet man ein Tripel von Dreidrei und gleichzeitig ein Tripel von Dreisechs, derart, dass eine bestimmte Tripelzerlegung zweier der Dreidrei die Tripel einer der Dreisechs liefert, und je zwei der Dreisechs die Doppeltangenten einer der Dreidrei gemein haben, indem gleichzeitig durch die Art, wie diese in den beiden Dreisechs als Tripel zusammengehören, die beiden Tripelzerfällungen der Dreidrei gegeben werden. Die drei Dreidrei oder die drei Dreisechs enthalten zusammen alle 28 Doppeltangenten bis auf eine, und diese ergänzt jede der Dreidrei zu einer *Caporali*schen Gruppe.

(38.) Beliebige drei Tripel aus einer Dreisechs stellen immer eine Dreidrei dar. In der That gehen so, weil sich jede Dreidrei, ihren beiden Tripelzerlegungen entsprechend, doppelt ergiebt, aus den 336 Dreisechs 3360 Dreidrei hervor, welches die richtige Anzahl ist.

Die Natur der *Cianis*chen Dreidrei zeigt sich am deutlichsten, wenn man in der *Geiser*schen Weise eine Doppeltangente auszeichnet und die 27 übrigen als die Projectionen der 27 geraden Linien einer Fläche dritter Ordnung aus einem Flächenpunkte auf die Ebene ansieht. Dann entsprechen

den 45 syzygetischen Tripeln von Doppeltangenten, welche durch die ausgezeichnete Doppeltangente zu syzygetischen Quadrupeln ergänzt werden, 45 ebene Dreiecke auf der Fläche dritter Ordnung. Nach ***Steiner*** lassen sich diese 45 Dreiecke auf 240 Arten so zu dreien zusammenfassen, dass drei zusammengehörige Dreiecke perspectiv sind, indem ihre homologen Ecken auf drei geraden Linien liegen und diese drei geraden Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden. Die homologen Seiten solcher drei Dreiecke liegen aber immer wieder in je einer Ebene und bilden drei neue Dreiecke, die wieder perspectiv sind. So findet man 120 Paare von Triedern, in deren Kanten sich je drei Paar gerade Linien der Fläche begegnen. Diese 720 Triederkanten gehen bei der Projection auf die Ebene in *Aronhold*sche Linien über, die 240 Triederspitzen in *Geiser*sche Punkte, und die 120 Gruppen von 9 Linien, aus denen sich zweimal drei perspective Dreiecke bilden lassen, in ebensoviel *Ciani*sche Dreidrei von Doppeltangenten.

Zeichnet man nach und nach alle 28 Doppeltangenten aus, so findet man alle *Aronhold*sche Linien, alle *Geiser*schen Punkte und alle *Ciani*schen Dreidrei. Die *Aronhold*schen Linien erhält man aber vierfach, denn zu jeder gehört eine *de Paolis*sche Zweidrei, zu dieser ein syzygetisches Quadrupel, und man gelangt zu *derselben* Zweidrei, welche von den Doppeltangenten des zugehörigen Quadrupels man auch auszeichnen mag. Jede Dreidrei und damit jeden *Geiser*schen Punkt erhält man aber nur einfach, denn zu der Dreidrei gehört eine bestimmte Doppeltangente, die man auszeichnen muss, um die Dreidrei in der angegebenen Weise zu erhalten. So gelangt man wieder zu den 5040 *Aronhold*schen Linien, den 3360 *Ciani*schen Dreidrei und 6720 *Geiser*schen Punkten.

Ueber eine reale Darstellung der imaginären Gebilde einer reellen Ebene und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie.

(Von Herrn *E. Busche* in Bergedorf.)

§ 1. Verallgemeinerungen der *Gauss*schen Ebene.

In einer im 40. Bande der Mathematischen Annalen veröffentlichten Abhandlung „Rappresentazioni reali delle forme complesse“ giebt Herr *C. Segre* zwei Methoden an, um die imaginären Punkte eines *reellen* linearen n-dimensionalen Raumes R_n durch reelle Punkte eines höheren Raumes darzustellen. Die erste von ihnen ist eine Verallgemeinerung der *Gauss*schen Ebene, die zweite eine solche der *Riemann*schen Kugel. Die Dimension des benutzten Raumes ist im ersten Falle gleich $2n$, und die Bilder der ∞^{2n} imaginären Punkte des R_n sind die reellen Punkte des R_{2n}, während im anderen Falle der Raum ein $R_{n(n+2)}$ ist, in dem die Fläche von der Ordnung $\binom{2n}{n}$ liegt, deren ∞^{2n} reelle Punkte die imaginären Punkte des R_n repräsentiren. Die erste Methode, die mit der im Folgenden zu erörternden näher verwandt ist als die hier nicht weiter zu betrachtende zweite Methode, beruht darauf, dass in dem R_{2n} ausserhalb des reellen R_n ein vollständig imaginärer R_{n-1} angenommen wird, d. h. ein solcher, der — wenn $n > 1$ ist — mit seinem conjugirten kein reelles Gebilde gemeinsam hat, und dass jeder durch diesen R_{n-1} gehende imaginäre R_n mit seinem conjugirten zum Schnitt gebracht wird. Dieser Schnitt, ein reeller Punkt, ist das Bild des imaginären Punktes, den der imaginäre R_n mit dem gegebenen reellen R_n gemein hat. Für $n = 1$ ist der imaginäre R_{n-1} ein Punkt, und die imaginären Geraden, die durch diesen Punkt gehen, liefern als Schnittpunkte mit ihren conjugirten

Geraden die Punkte einer Repräsentationsebene*) für die imaginären Punkte der gegebenen reellen Geraden. Ist der imaginäre Hülfspunkt einer der beiden unendlich fernen Kreispunkte, so geht die Ebene in eine *Gauss*sche Ebene über.**)

Diese *Segre*sche Methode ist also thatsächlich eine directe Verallgemeinerung der *Gauss*schen, aber sie ist nicht die einzige. Wenn man nicht gerade darauf Gewicht legen will, dass die imaginären *Punkte* eines reellen R_n durch die reellen Punkte eines höheren Raumes dargestellt werden, so kann man auch das folgende Verfahren anwenden, das vor dem *Segre*schen und anderen analogen, die man noch aufstellen kann, den Vorzug hat, einen Raum zu benutzen, dessen Dimension nur um 1 höher ist als die des vorgelegten reellen R_n. Stellt man sich nämlich die Aufgabe, die imaginären R_{n-1} des reellen R_n durch reelle R_{n-1} eines höheren Raumes zu repräsentiren, so zeigt sich, dass schon für einen reellen R_{n+1} die Anzahl der darin enthaltenen reellen R_{n-1} doppelt so gross ist wie die Anzahl der reellen R_{n-1} des R_n, also gleich der Anzahl der imaginären R_{n-1} des R_n. Es ist nämlich bekanntlich†) die Stufe der reellen R_k in einem reellen R_m gleich $(k+1)(m-k)$, also die der reellen R_{n-1} in einem R_n gleich n und in einem R_{n+1} gleich $2n$.

Um diesen Umstand zur Darstellung der imaginären R_{n-1} eines reellen R_n zu benutzen, nehme man in einem R_{n+1}, der den R_n enthält, einen

*) Vergl. die Preisarbeit des Herrn *E. Kötter*: Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven. Berlin 1887. Herr *Kötter* benutzt solche projectivisch verallgemeinerten *Gauss*schen Ebenen als methodisches Hülfsmittel, natürlich ohne von einer Bezeichnung ihrer Punkte mit complexen Zahlen Gebrauch zu machen. Herrn *Kötter* verdanke ich den Hinweis auf den Zusammenhang meiner Darstellung des Imaginären mit der von Herrn *Segre* verallgemeinerten *v. Staudt*schen Auffassung der *Gauss*schen Ebene.

**) Vergl. *v. Staudt*: Beiträge zur Geometrie der Lage, Art. 410. Die *v. Staudt*sche Theorie des Imaginären ist behandelt worden von *F. August*: Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie, Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin, 1872, ferner von *O. Stolz*: Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie, Math. Ann. Bd. 4, und von *J. Lüroth*: Ueber das Imaginäre in der Geometrie, Math. Ann. Bd. 8. Ausführliche Litteraturangaben findet man in dem schon erwähnten *Kötter*schen Werke.

†) Vergl. *Schubert*: Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes, Math. Ann. Bd. 26, oder auch von demselben Verfasser: Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension. Mittheilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg, Bd. I.

imaginären Punkt ausserhalb des R_n an und verbinde ihn mit einem imaginären R_{n-1} des gegebenen R_n durch einen imaginären R_n; dieser wird von seinem conjugirten in einem reellen R_{n-1} geschnitten, der das Bild des imaginären R_{n-1} ist. Für $n = 1$ geht diese Methode, ebenso wie die des Herrn *Segre*, in die *Gauss*sche über. Für $n = 2$ führt sie zu dem, von Herrn *Segre* beiläufig erwähnten, von *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über *Abel*sche Functionen benutzten Mittel, das Element eines durch eine algebraische Gleichung zwischen zwei complexen Variabeln definirten algebraischen Gebildes durch die Verbindungslinie der Bildpunkte der Variabeln auf zwei parallelen Ebenen zu veranschaulichen.

Auch die von *S. Lie* in einer kurzen Notiz im 70. Bande dieses Journals „Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie“ angegebene räumliche Abbildung der imaginären Elemente einer Ebene ist nichts anderes als ein Specialfall der angegebenen allgemeinen Methode.*) *Lie* geht von der Darstellung des Punktes mit den complexen Coordinaten $x+iy$, $z+ip$ aus, indem er in dem Punkte $x+iy$ einer *Gauss*schen Ebene eine Senkrechte von der Länge z errichtet und deren Endpunkt, mit dem „Gewichte“ p belastet, als Repräsentanten des imaginären Punktes betrachtet. Ich glaube, dass nur diese unsymmetrische Bevorzugung eines

---

*) Die weitere Ausführung seines Verfahrens hat *Lie* in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania, 1869, gegeben. Diese Arbeit ist mir nur durch die Bearbeitung bekannt, die Herr *Domsch* im Programm des Realgymnasiums zu Borna, 1888, von ihr geliefert hat. Bei dieser Gelegenheit erwähne ich auch die Arbeiten des Herrn *Suhle*: „Ueber imaginäre Punkte ebener Curven“ in den Programmen des Realgymnasiums zu Dessau, 1893 und 1894, und „Zur Theorie der reellen Curven einer rationalen Function n-ten Grades für complexe Variabele“, 1896. Herr *Suhle* geht von der bekannten Methode aus, den reellen und den imaginären Bestandtheil einer Function complexen Arguments durch die Längen zweier in dem Punkt einer *Gauss*schen Ebene, der dem Argument entspricht, errichteten Senkrechten darzustellen. Für den Fall, dass der imaginäre Bestandtheil verschwindet, erhält man so als geometrischen Ort für den Endpunkt der den reellen Bestandtheil repräsentirenden Strecke gewisse reelle Raumcurven, die Herr *Suhle* näher untersucht. Es ist leicht zu sehen, dass diese Methode in der allgemeineren von *Lie* enthalten ist.

Ausser diesen räumlichen Darstellungen der imaginären Elemente einer Ebene sind mir noch zwei bekannt, die des Herrn *Henschel*: „Versuch einer räumlichen Darstellung complexer ebener Gebilde“ (Jena 1892) und die von Herrn *Pietzker* in seinen „Beiträgen zur Functionenlehre“ (Leipzig 1899). Beide scheinen mir nicht unmittelbar auf das von Herrn *Segre* verallgemeinerte *v. Staudt*sche Princip zurückführbar zu sein.

der vier Coordinatenbestandtheile es verursacht hat, dass die *Lie*sche Methode bis jetzt wenig beachtet worden ist, und halte es deshalb nicht für überflüssig, von einem anderen, ebenfalls ganz elementaren, Ausgangspunkte aus diesen besonders wichtigen Specialfall der erwähnten Verallgemeinerung der Zahlenebene noch einmal zu behandeln.

Ich bin zu meiner Darstellung, die mir wegen der Symmetrie sowohl zwischen den Coordinatenbestandtheilen als auch zwischen den Punkt- und Liniencoordinaten vor dem Verfahren von *Lie* gewisse Vorzüge zu besitzen scheint, bei Versuchen gekommen, den *Eisenstein*schen geometrischen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes auf die gewöhnlichen complexen Zahlen zu übertragen. Auf tiefergehende geometrische Untersuchungen kann ich mich deshalb nicht einlassen; ich beschränke mich darauf, die Brauchbarkeit dieser Methode, den imaginären Elementen einer reellen Ebene einen Platz ausserhalb der Ebene anzuweisen, dadurch zu zeigen, dass ich die ersten Anfangsgründe einer analytischen Geometrie entwickele, die sich complexer Coordinaten bedient. Die zahlentheoretischen Resultate der letzten Paragraphen können zwar auch auf anderem Wege gewonnen werden, sie sind aber immerhin wohl geeignet, den Nutzen einer räumlichen Veranschaulichung der imaginären ebenen Gebilde darzuthun.

§ 2. Darstellung der imaginären Punkte einer reellen Ebene.

Es ist anzunehmen, dass die *Gauss*sche Repräsentationsebene sich weniger rasch Eingang verschafft hätte, wenn sie ursprünglich mittelst des *v. Staudt*schen Hülfspunktes definirt worden wäre. Deshalb werde ich — ebenso wie *Lie* von *Gauss*schen Ebenen ausgehend — die räumlichen Gebilde, durch die die imaginären Geraden und Punkte einer reellen Ebene veranschaulicht werden sollen, zunächst ohne besondere Hervorhebung des imaginären Hülfspunktes definiren und nachträglich zeigen, dass sie sich auch in der im § 1 in Bezug auf die Geraden angegebenen Weise ergeben.

Die Zahlenebene setze ich in projectivisch verallgemeinerter Form (*Kötter*sche Repräsentationsebene) voraus. Wie man die reellen Punkte einer Geraden oder die reellen Strahlen eines Büschels mit den reellen Zahlen und die reellen Punkte einer Ebene oder die reellen Strahlen eines Bündels mit Zahlenpaaren, also auch mit complexen Zahlen bezeichnen kann, ohne metrische Hülfsmittel zu benutzen, ist z. B. aus *Clebsch-Lindemann*s „Vorlesungen über Geometrie“, Band II, aus Herrn *Klein*s „Vorlesungen

über Nicht-Euklidische Geometrie“ oder aus Herrn *Killing*s „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“ bekannt. Die Nichtbenutzung der Metrik ist bei meiner Darstellung nicht wesentlich, aber sie ist zweckmässig, weil man so die unendlich fernen Gebilde nicht besonders auszuzeichnen braucht; das würde sich nicht vermeiden lassen, wenn die *Gauss*sche Ebene in der gewöhnlichen Form zu Grunde gelegt würde.

Zwei Repräsentationsebenen, die X-Ebene, von der ein beliebiger Punkt mit $X = X_1 + X_2 i$ bezeichnet werde, und die Y-Ebene ($Y = Y_1 + Y_2 i$) mögen sich in der geraden Linie schneiden, deren Punkte in beiden Ebenen mit Zahlen mit unendlich grossem absoluten Betrag bezeichnet sind. Die Nullpunkte der Ebenen seien S und T. Auf den von ihnen ausgehenden Geraden der Ebenen liegen die Punkte mit constantem Verhältniss $X_2 : X_1$ und $Y_2 : Y_1$. Die Punkte der beiden Ebenen sollen nun derartig mit den complexen Zahlen bezeichnet sein, dass die Verhältnisse $X_2 : X_1$ und $Y_2 : Y_1$ jedes Punktes der Schnittlinie übereinstimmen. Auf der Schnittlinie entsteht so ein *von Staudt*sches Abscissensystem, dessen Nullpunkt mit N, dessen Unendlichkeitspunkt mit M bezeichnet werde.

Die X- und Y-Ebene entsprechen den Coordinatenaxen eines nicht homogenen projectivischen ebenen Coordinatensystems, die X und Y den *Plücker*schen Liniencoordinaten der Geraden, die den Punkt X mit dem Punkt Y verbindet. Die Punkte T und S sind dementsprechend die Mittelpunkte zweier Coordinatenbündel, deren Strahlen $x = x_1 + x_2 i$ und $y = y_1 + y_2 i$ mit den negativen reciproken Werthen der Punkte bezeichnet werden, die sie in den Coordinatenebenen treffen.

Die Ebene NST oder σ ist die Ebene, deren reelle und imaginäre Elemente mittelst des soeben durch seine Coordinaten-Ebenen und -Bündel definirten räumlichen Systems Σ dargestellt werden sollen. Die Coordinaten der reellen Punkte und Geraden von σ sind reell. Die Gleichung

$$Xx + Yy + 1 = 0$$

ist, wenn X, Y reelle Constanten sind, die Gleichung der reellen Geraden von σ, die durch die auf den reellen Axen NS und NT liegenden Punkte X und Y der Coordinatenebenen geht, und wenn x, y reelle Constanten sind, die Gleichung des reellen Punktes von σ, in dem die mit x und y bezeichneten Coordinatenstrahlen der Bündel T und S sich schneiden. Die Gleichung

$$Xx + Yy = 0$$

ist die einer durch den Nullpunkt N gehenden Geraden oder eines auf der Nullgeraden ST liegenden Punktes.

Diese bekannten Betrachtungen werden auf die lineare Gleichung mit complexen Coefficienten übertragen. Durch die Gleichung

$$aX+bY+1=0, \tag{1.}$$

wo die Zahlen $a=a_1+a_2i$, $b=b_1+b_2i$ vorläufig beide von Null verschieden sein mögen, werden die beiden Coordinatenebenen collinear so auf einander bezogen, dass sie ihre Schnittlinie, die kurz als die *Basis* von Σ bezeichnet werden soll, entsprechend gemein haben, denn einem unendlich grossen X entspricht ein unendlich grosses Y. Wenn nun das Verhältniss $b:a$ reell ist, so haben die auf einander bezogenen Ebenen überdies jeden Punkt der Basis entsprechend gemein und liegen perspectivisch zu einander. Alle Geraden, deren Coordinaten X, Y der Gleichung (1.) genügen, gehen daher durch einen Punkt, und zwar durch den Schnittpunkt der Strahlen a von T und b von S, da z. B. für $Y=0$ der Werth von $X=-1:a$ wird. Dieser Punkt mit den Coordinaten a, b hat also die Gleichung (1.). Es ist leicht zu sehen, dass den ∞^3 Zahlenpaaren b und a mit reellem Verhältniss die ∞^3 Raumpunkte entsprechen; ausgenommen sind jedoch die Punkte der Basis und die der Nullgeraden ST. Die letzteren gehören zu den homogenen Gleichungen

$$aX+bX=0 \tag{2.}$$

mit reellem $b:a$ oder auch zu unendlich grossen Werthen von a und b (mit reellem Verhältniss) in der Gleichung (1.). Ein Punkt mit reellem Coordinatenverhältniss, der sich von einem gewöhnlichen Raumpunkt nur durch eine später zu erwähnende Eigenschaft unterscheidet, möge ein *atroper* Punkt genannt werden.

Wenn das Coordinatenverhältniss nicht reell ist, so haben die durch die Gleichung (1.) oder (2.) auf einander bezogenen Coordinatenebenen keinen reellen Punkt der Basis gemeinsam, sondern — wie eine leichte Rechnung zeigt — die Punkte J und J', die in dem Abscissensystem der Basis mit $\pm i$ zu bezeichnen sind. Diese imaginären Punkte werden als nicht zu σ gehörig natürlich nicht durch reale Gebilde von Σ repräsentirt; nach *v. Staudt* werden sie durch die Involution dargestellt, die jedem Punkt der Basis den Punkt mit dem negativen reciproken Werth zuordnet. Der

Punkt J ist, wie später gezeigt wird, der im § 1 erwähnte Hülfspunkt, von dem aus die imaginären Gebilde von σ projicirt werden.

Die Geraden X/Y, die der Gleichung (1.) oder (2.) genügen, bilden jetzt eine nicht zerfallende lineare Congruenz, deren imaginäre Directricen durch die Punkte J und J' der Basis gehen. Eine solche Congruenz, zu deren Strahlen die Basis gehört, und die durch zwei, weder die Basis, noch einander schneidende Strahlen, z. B. die Coordinatenstrahlen a und b eindeutig bestimmt ist, soll ein *Punkt**) genannt werden, und zwar zum Unterschied von den schon erwähnten atropen Punkten, ein *heterotroper* Punkt. Bei einem solchen Punkt kann man nämlich von einer Drehungsrichtung sprechen, insofern zwei benachbarte Strahlen sich entweder wie die Strahlen einer rechts oder einer links gewundenen Regelschar zu einander verhalten. Der eine oder der andere Fall tritt ein, je nachdem $a_1 b_2 - b_1 a_2$ positiv oder negativ ist. Welches Zeichen z. B. einer rechts gewundenen Congruenz entspricht, hängt vom Coordinatensystem ab. Der Ausdruck $p = a_1 b_2 - b_1 a_2$ möge, weil er zu der *Lie*schen Zahl p in enger Beziehung steht, das „Gewicht" des Punktes a/b heissen, und ebenso werde $P = A_1 B_2 - B_1 A_2$ das Gewicht der Geraden A/B genannt. Conjugirte Punkte, d. h. solche, deren gleichnamige Coordinaten conjugirt complex sind, haben entgegengesetztes Gewicht und sind also entgegengesetzt gewunden, wie z. B. die Punkte $X \pm iY = 0$, zu deren Strahlen die Nullgerade ST gehört; sie entsprechen den Kreispunkten einer Ebene, deren Punkte mit Parallelcoordinaten bezeichnet sind. Wenn das Gewicht gleich Null ist, so ist der Punkt atrop.

Es möge gesagt werden, dass ein Punkt auf einer Geraden liege, wenn diese zu seinen Strahlen gehört.

Eine lineare Congruenz mit imaginären Directricen veranschaulicht man sich bekanntlich am besten dadurch, dass man um einen beliebig gewählten Strahl als „Mittelstrahl" herum sich alle übrigen Strahlen zu ∞^1 Regelscharen angeordnet denkt. Bei einem heterotropen Punkt sind die Spuren dieser Regelscharen in den Coordinatenebenen Kegelschnitte, die durch die Punkte J und J' der Basis gehen. Solche Kegelschnitte, die den Kreisen einer *Gauss*schen Ebene entsprechen, sollen nach *v. Staudt* und Herrn *E. Kötter* als *Ketten* bezeichnet werden. Die Coordinaten X_0/Y_0 des Mittelstrahls sind die „Mittelpunkte" der Ketten, d. h. die Pole der Basis in Bezug auf die

*) Vergl. S. 9 des Programms von Herrn *Domsch*.

Ketten. Der Strahl X_0/Y_0 ist für jede Regelfläche, die durch zwei zusammengehörige Ketten der Coordinatenebenen bestimmt ist, die reciproke Polare der Basis. Diese Behauptungen lassen sich leicht beweisen mittelst der Bemerkung, dass, wenn X_0/Y_0 ein Strahl des Punktes a/b ist, die Gleichung des Punktes auf die Form

$$a(X-X_0)+b(Y-Y_0)=0$$

gebracht werden kann.

Von jedem heterotropen Punkte liegt ein Strahl in der Ebene σ, das ist der Träger des Punktes und seines conjugirten im *v. Staudt*schen Sinne. Nimmt man ihn als Mittelstrahl, so liegen die zu zwei conjugirten Punkten gehörigen Regelscharen auf denselben Regelflächen als deren Leitscharen. Es ist jedoch zweckmässig, als den Mittelstrahl eines heterotropen Punktes a/b den Strahl mit den Coordinaten

$$-\frac{b_2+b_1 i}{2(a_1b_2-a_2b_1)} \;\Big|\; \frac{a_2+a_1 i}{2(a_1b_2-a_2b_1)}$$

zu wählen. Dieser Strahl möge als die *Charakteristik* des Punktes a/b bezeichnet werden.*) Er hat die besondere Eigenschaft, dass zu seinen Regelscharen die gehört, deren Strahlen die Nullgerade ST schneiden. Da diese Strahlen das Gewicht Null haben, so entspricht die eben genannte Regelschar eines heterotropen Punktes der atropen Punktreihe einer Geraden, und da diese letztere zur Veranschaulichung der Geraden dient, so erscheint es angemessen, bei einem heterotropen Punkte die Serie von Regelscharen zu

*) Ausser den Gründen, die für die Bevorzugung dieses Strahles sich später ergeben werden, möge hier noch der folgende erwähnt werden. Gerade so wie man die imaginären Elemente einer reellen Ebene durch reale Gebilde in Σ darstellt, kann man dual entsprechend auch die imaginären Geraden und Ebenen eines reellen Punktes durch die Raumgeraden und gewisse lineare Congruenzen repräsentiren. Wählt man als diesen Punkt den Punkt M der Basis und bringt auch im Uebrigen das betreffende räumliche System in eine geeignete, nahe liegende Beziehung zu Σ, so gilt der Satz, dass die Charakteristiken aller Σ-Punkte einer Geraden eine lineare Congruenz bilden, die eine imaginäre Ebene darstellt, und dass die Gerade die Charakteristik dieser Ebene ist. Dabei ist die Charakteristik der Ebene die Gerade, deren Coordinaten in dem Σ dual entsprechenden System aus den Coordinaten der Ebene ebenso gebildet sind, wie die Coordinaten der Charakteristik eines Σ-Punktes aus den Coordinaten dieses Punktes. Da man nun, wenn man das System Σ benutzen will, um Sätze der Raumgeometrie zu finden, dieses dual entsprechende System nicht gut entbehren kann, so ist es offenbar von Vortheil, unter den Strahlen eines heterotropen Punktes den auszuzeichnen, der eine solche Beziehung zwischen beiden Systemen vermittelt.

bevorzugen, deren Mittelstrahl die Charakteristik des Punktes ist, obgleich sie keine vom Coordinatensystem unabhängige Bedeutung für den Punkt hat. Durch seine Charakteristik ist der Punkt bestimmt; eine Gerade ist nur von einem Punkte die Charakteristik, die Gerade A/B mit von Null verschiedenem Gewicht von dem Punkte

$$-\frac{B_2+B_1 i}{2(A_1B_2-A_2B_1)} \Big| \frac{A_2+A_1 i}{2(A_1B_2-A_2B_1)}.$$

Die Gewichte des Punktes a/b und seiner Charakteristik A/B stehen in der Beziehung

$$a_1b_2-b_1a_2 = -\frac{1}{4(A_1B_2-A_2B_1)}$$

zu einander.

Die Punkte mit rein imaginären Coordinaten, die allei atrop sind, liegen in der Ebene MST. Ueberhaupt liegen in einer Ebene des Büschels mit der Axe ST die atropen Punkte, bei denen das Verhältniss $a_2:a_1 = b_2:b_1$ einen constanten Werth besitzt.

§ 3. Die Geraden in Σ.

Die Gleichung

$$Ax+By+1 = 0$$

ist die Gleichung der Geraden mit den Coordinaten A/B. Auf ihr liegen ∞^1 atrope Punkte, nämlich die, deren Träger der Strahl A/B im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist. Ausserdem liegen auf ihr ∞^2 heterotrope Punkte, nämlich die zu deren Strahlen A/B gehört. Der Strahl A/B dient als Bild der Geraden A/B. Er schneidet die Ebene σ in dem Punkte, der nach *v. Staudt* als Träger der imaginären Geraden A/B bezeichnet wird. Durch denselben Punkt geht die conjugirte Gerade, deren Coordinaten zu denen von A/B conjugirt sind. Die Punkte $A_1 \pm A_2 i$ und $B_1 \pm B_2 i$ sind die Doppelpunkte der Punktinvolutionen, die in den Coordinatenebenen durch die Strahleninvolution bestimmt werden, die nach *v. Staudt* die imaginäre Gerade und ihre conjugirte definirt*).

Die Geraden mit reellem Coordinatenverhältniss oder mit dem Gewicht Null schneiden, wie schon erwähnt wurde, die Nullgerade ST, z. B. liegen in der Ebene MST die Geraden, deren beide Coordinaten rein imaginär sind.

Die Geraden mit einer homogenen Gleichung

$$Ax+By = 0,$$

*) Vergl. *August*: a. a. O. S. 7.

deren Coordinaten also unendlich gross sind, unterscheiden sich wesentlich von den bisher betrachteten Geraden. Sie mögen als uneigentliche Geraden bezeichnet werden. Ist nämlich zunächst $B:A$ reell, so liegen alle Punkte der Geraden auf einer durch die Basis gehenden Ebene, da jede eigentliche Gerade mit einer solchen *„Feldgeraden“* einen atropen Punkt gemeinsam hat. Zu diesen Feldgeraden gehören auch die Coordinatenebenen $y = 0$ und $x = 0$. Allen reellen Verhältnissen $B:A$ entsprechend erhält man ∞^1 Feldgeraden, deren jede einen atropen Punkt von ST mit der Basis verbindet. Bezeichnet man den Punkt von ST mit $B:A$, so erhält man ein Abscissensystem auf ST, dessen Nullpunkt T, dessen Unendlichkeitspunkt S ist. Alle atropen Punkte mit demselben Coordinatenverhältniss $y:x$ liegen auf derselben Feldgeraden; sie führt nach dem Punkt von ST hin, der in diesem Abscissensystem mit dem negativen reciproken Werth von $y:x$ bezeichnet ist.

Die ∞^3 geraden Linien, die auf den Feldgeraden liegen, also die Basis schneiden, sind nicht als Bilder von imaginären Geraden von σ zu betrachten; sie sind keine Geraden von Σ, da auf ihnen nur ∞^1 Punkte liegen.

Jetzt kann der Unterschied zwischen einem gewöhnlichen Raumpunkt und einem atropen Punkte angegeben werden: zu den Geraden eines atropen Punktes gehört eine Feldgerade, er ist eine in ein Strahlenbündel und ein Strahlenfeld zerfallende lineare Congruenz, während ein gewöhnlicher Punkt nur ein Strahlenbündel ist. Ein atroper Punkt hat mit der Ebene σ den Strahl gemeinsam, in dem seine Feldgerade diese Ebene schneidet. Dieser Strahl ist der *v. Staudt*sche Träger des atropen Punktes und seines conjugirten. Ferner kann jetzt auch die Voraussetzung, dass die Coordinaten eines Punktes von Null verschieden sein sollten, fallen gelassen werden. Die mit Null zu bezeichnenden Coordinatenstrahlen sind die beiden Feldgeraden, die zugleich als Coordinatenebenen dienen. Ein Punkt, dessen x-Coordinate gleich Null ist, ist der Schnitt des (eigentlichen) y-Coordinatenstrahls mit der Ebene $x = 0$, d. h. der Y-Ebene. Der Nullpunkt 0/0 ist der Schnittpunkt der beiden Nullstrahlen der Coordinatenbündel; er ist ein Element von Σ, das eine Ausnahmestellung einnimmt anolog der den Punkt ∞ repräsentirenden unendlich fernen Geraden einer gewöhnlichen *Gauss*schen Ebene. Dass bei meiner Darstellung — bei *Lie* ist es anders — nicht etwa die Nullgerade, sondern der Nullpunkt und die durch ihn gehenden Geraden mit unendlich grossen Coordinaten eine derartige Sonderstellung einnehmen, entspricht dem Umstande, dass die Geraden der Ebene σ die

Elemente sind, die bei dieser Verallgemeinerung der *Gauss*schen Darstellung an die Stelle der Punkte einer reellen Geraden treten. Deshalb ist es nach meiner Ansicht zweckmässig, hier die Nullgerade ebensowenig auszuzeichnen, wie in der *Gauss*schen Ebene den Nullpunkt.

Der Nullpunkt kann als durch die Basis repräsentirt angesehen werden; er soll weder zu den atropen, noch zu den heterotropen Punkten gerechnet werden.

Wenn in der Gleichung

$$Ax+By=0$$

$B:A$ nicht reell ist, so enthält diese uneigentliche Gerade keinen atropen Punkt, sondern ausser dem Nullpunkt nur heterotrope Punkte. Von einer solchen Geraden kann man sich also, wenn auch jeder ihrer Punkte ein reales Strahlengebilde ist, keine anschauliche Vorstellung machen, falls man nicht etwa die von allen Charakteristiken der auf der Geraden liegenden Punkte gebildete lineare Congruenz in Betracht ziehen will. Jede von diesen uneigentlichen Geraden verbindet einen heterotropen Punkt von ST mit dem Nullpunkt, nämlich den, dessen Coordinatenverhältniss $y:x$ gleich $-A:B$ ist. Auf ihr liegen alle heterotropen Punkte mit diesem Coordinatenverhältniss.

§ 4. Ein reelles Coordinatensystem.

Es ist für die leichtere Orientirung in dem System Σ von Vortheil, neben den complexen Coordinaten auch reelle Raumcoordinaten einzuführen. Als Coordinatentetraeder benutzt man am besten das Tetraeder $NMST$ und betrachtet N als Nullpunkt der nicht homogenen projectivischen Coordinaten und die Ebene MST als die Ebene, deren Punkte mit unendlich grossen Coordinaten bezeichnet sind. Der Punkt $\xi|0|0$ möge der Punkt auf NS sein, dessen x-Coordinate gleich ξ ist, ebenso $0|\eta|0$ der Punkt auf NT, dessen y-Coordinate gleich η ist, und endlich $0|0|\zeta$ der Punkt auf NM, der in dem auf der Basis NM durch die Verhältnisse $X_2:X_1=Y_2:Y_1$ bestimmten Abscissensystem mit ζ bezeichnet ist. Der atrope Punkt $x_1+x_2i|y_1+y_2i$, wo $x_2:x_1=y_2:y_1$ ist, hat dann die reellen Coordinaten

$$\xi=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1},\qquad \eta=\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1},\qquad \zeta=-\frac{x_2}{x_1}=-\frac{y_2}{y_1}.$$

Denn der mit x_1+x_2i bezeichnete Coordinatenstrahl trifft die X-Ebene in dem Punkte

$$-\frac{1}{x_1+x_2i}=-\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}i,$$

und die Ebene, die diesen Strahl mit MT verbindet, schneidet NS in dem Punkte $-\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$ der X-Ebene; der negative reciproke Werth hiervon ist mithin die x- und also auch die ξ-Coordinate des Punktes auf NS. Das Entsprechende gilt von η, und der Werth von ζ folgt daraus, dass der Punkt $x_1+x_2i\,|\,y_1+y_2i$ in der Ebene von ST liegt, die die Basis im Punkte $-x_2:x_1 = -y_2:y_1$ trifft.

Um umgekehrt die x/y-Coordinaten eines Punktes $\xi|\eta|\zeta$ zu finden, benutzt man die Gleichungen

$$x_1-\zeta x_2 = \xi,$$
$$x_1\zeta+x_2 = 0,$$

aus denen man

$$x_1 = \frac{\xi}{1+\zeta^2}, \quad x_2 = -\frac{\xi\zeta}{1+\zeta^2}, \quad x = \frac{\xi}{1+\zeta i}$$

findet. Ebenso ist

$$y_1 = \frac{\eta}{1+\zeta^2}, \quad y_2 = -\frac{\eta\zeta}{1+\zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{1+\zeta i}.$$

Hieraus ergiebt sich z. B., wenn man die Werthe von x und y in die Gleichung der eigentlichen Geraden A/B einsetzt und dann das Reelle und Imaginäre trennt, dass die atropen Punkte einer Geraden auf der Schnittlinie der beiden Ebenen

$$A_1\xi+B_1\eta+1 = 0,$$
$$A_2\xi+B_2\eta+\zeta = 0$$

liegen. Falls das Gewicht $A_1B_2-A_2B_1$ der Geraden gleich Null ist, geht die Gerade durch einen Punkt von ST. Für eine uneigentliche Gerade hat man als Ort ihrer atropen Punkte

$$A_1\xi+B_1\eta = 0,$$
$$A_2\xi+B_2\eta = 0,$$

woraus die oben angegebenen Eigenschaften einer solchen Geraden, die von $A_1B_2-A_2B_1$ abhängen, sich wieder ergeben.

Die eigentliche Gerade X/Y schneidet die X-Ebene in dem Punkte X_1+X_2i, der die Σ-Punktcoordinaten $-\frac{1}{X_1+X_2i}\Big|0$ und also die reellen Coordinaten $-\frac{1}{X_1}\Big|0\Big|\frac{X_2}{X_1}$ hat, die Y-Ebene in dem Punkte $0\Big|-\frac{1}{Y_1}\Big|\frac{Y_2}{Y_1}$. Daraus findet man die 6 reellen Coordinaten der Geraden X/Y gleich

$$Y_1 : -X_1 : X_1Y_2-Y_1X_2 : X_2 : Y_2 : 1.$$

§ 5. Das System Σ in der Auffassung des Art. 410 der Beiträge zur Geometrie der Lage.

Das reelle Coordinatensystem kann benutzt werden, um zu zeigen, dass thatsächlich das System Σ in der im § 1 angegebenen Beziehung zu der Ebene σ steht, die es als eine Verallgemeinerung der *Gauss*schen Ebene charakterisirt. Man hat zu dem Zwecke nur nachzuweisen*), dass die imaginäre Ebene, die den Punkt J oder $0|0|i$ der Basis mit den Punkten $-\frac{1}{X_1}\Big|0\Big|\frac{X_2}{X_1}$ und $0\Big|-\frac{1}{Y_1}\Big|\frac{Y_2}{Y_1}$ verbindet, die also die Σ-Gerade $X_1+X_2i\,|\,Y_1+Y_2i$ als reellen Träger hat, die $\xi\eta$-Ebene σ in der Geraden schneidet, die als Gerade dieser Ebene aufgefasst, die Gleichung

$$(X_1+X_2i)\xi+(Y_1+Y_2i)\eta+1=0$$

hat. Statt dessen kann man auch zeigen, dass die conjugirten Ebenen, von denen die eine den Punkt $0|0|i$ mit der eben genannten imaginären Geraden von σ und die andere den Punkt $0|0|-i$ mit der conjugirten Geraden von σ verbindet, sich in der Σ-Geraden $X_1+X_2i\,|\,Y_1+Y_2i$ schneiden. Wenn die imaginäre Gerade von σ durch den Nullpunkt geht, so ist der reelle Träger der Ebene, die sie mit $0|0|i$ verbindet, die Basis, und die Ebene wird reell, wenn das Coordinatenverhältniss der Geraden reell ist. Der Träger des imaginären Hülfspunktes J ist also für Σ in analoger Weise ein Ausnahme-Element wie für die *Gauss*sche Ebene.

Ebenso ist der Nachweis zu führen, dass die Gerade, die den Punkt $0|0|i$ mit dem imaginären Punkt $x_1+x_2i\,|\,y_1+y_2i\,|\,0$ von σ verbindet, wenn $x_1y_2-y_1x_2$ verschwindet, die *v. Staudt*sche Gerade I. Art ist, deren reeller Punkt der atrope Punkt mit den Σ-Coordinaten $x_1+x_2i\,|\,y_1+y_2i$, deren reelle Ebene die Feldgerade des atropen Punktes ist.

Wenn das Gewicht des Punktes nicht verschwindet, so ist seine Verbindungslinie mit $0|0|i$ die *v. Staudt*sche Gerade II. Art, deren Träger die lineare Congruenz ist, die als heterotroper Punkt mit den Coordinaten $x_1+x_2i\,|\,y_1+y_2i$ bezeichnet wurde. Um wenigstens für diesen Fall die einfache Rechnung, die diese Behauptung bestätigt, durchzuführen, berechne man die 6 Coordinaten der Verbindungslinie von $0|0|i$ und $x|y|0$. Man findet sie gleich

$$x:y:-i:-yi:xi:0.$$

Damit der Strahl, der die Σ-Gerade $X|Y$ repräsentirt, dessen 6 Coordinaten also

$$Y_1:-X_1:X_1Y_2-Y_1X_2:X_2:Y_2:1$$

*) Vergl. hierzu *Klein*: Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie Bd. I, S. 72.

sind, die imaginäre Verbindungslinie schneide, muss bekanntlich die Gleichung

$$x \cdot X_2 + y \cdot Y_2 - i - yi \cdot Y_1 - xi \cdot X_1 + 0 \cdot (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) = 0$$

oder

$$x \cdot X + y \cdot Y + 1 = 0$$

erfüllt sein. Das ist aber gerade die Gleichung des Σ-Punktes $x|y$.

Die *v. Staudt*sche Gerade ist die eine imaginäre Directrice des heterotropen Punktes, die andere ist die conjugirte Gerade, die den Punkt $0|0|-i$ mit dem imaginären Punkt $x_1 - x_2 i | y_1 - y_2 i | 0$ von σ verbindet. Die beiden conjugirten Geraden II. Art schneiden sich in dem heterotropen Punkt, der als ihr gemeinsamer realer Träger anzusehen ist.

Es möge ausdrücklich hervorgehoben werden, dass, während zwei conjugirten *v. Staudt*schen Geraden dieselbe lineare Congruenz als Träger dient, zwei conjugirte heterotrope Punkte — ebenso wie zwei conjugirte Σ-Gerade — vollständig von einander getrennte Gebilde sind, die nur die Basis und einen Strahl der σ-Ebene gemeinsam haben. Die Trennnng conjugirter Elemente ergiebt sich also in Σ ebenso naturgemäss wie in der *Gauss*schen Ebene.

§ 6. Die Geometrie des Punktes und der Geraden in Σ.

Der Punkt und die Gerade stehen sich in Σ dual gegenüber. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, ihre Verbindungslinie, deren Coordinaten sich aus den Gleichungen der Punkte eindeutig ergeben. Liegen beide Punkte auf derselben Feldgeraden, so ist diese ihre Verbindungslinie. Es steht natürlich nichts im Wege, in diesem Falle den Strahl, der die Punkte im gewöhnlichen Sinne des Wortes verbindet, als Bild der Feldgeraden zu betrachten, oder auch, besonders wenn es sich um zwei conjugirte Punkte handelt, den Strahl, in dem die Feldgerade die σ-Ebene schneidet, d. h. den *v. Staudt*schen Träger der beiden Punkte.

Ebenso bestimmen zwei Gerade einen Punkt, ihren Schnittpunkt; er ist im allgemeinen heterotrop und nur dann atrop, wenn sich die Geraden im gewöhnlichen Sinne des Wortes schneiden. Eine Feldgerade wird von jeder eigentlichen Geraden in einem atropen Punkte geschnitten. Jede Gerade hat einen Punkt mit unendlich grossen Coordinaten, nämlich ihren Schnittpunkt mit der Nullgeraden ST. Für eine Feldgerade ist dies ein atroper Punkt von ST, z. B. für die Gerade $y = 0$ der Punkt S, sodass die Coordinatenebenen, als Σ-Geraden betrachtet, einen Punkt ∞ besitzen in

Uebereinstimmung mit der in der Functionentheorie benutzten *Gauss*schen Ebene. Jeder Punkt hat eine Gerade mit unendlich grossen Coordinaten, nämlich seine Verbindungslinie mit dem Nullpunkt; für einen atropen Punkt ist diese Gerade die Feldgerade, auf der er liegt.

Die Geraden $X|Y$, deren Gewicht $X_1Y_2-Y_1X_2=0$ ist, schneiden die Nullgerade ST in atropen Punkten, sie bilden also einen speciellen linearen Complex. Alle Geraden, für die $X_1Y_2-Y_1X_2$ gleich einer constanten reellen Zahl P ist, bilden, weil $X_1Y_2-Y_1X_2$ zu den 6 reellen Coordinaten von $X|Y$ gehört, einen nicht speciellen linearen Complex. Dieser hat mit einem heterotropen Punkt im allgemeinen eine Regelschar gemeinsam, die zu der Serie von Regelscharen gehört, deren Mittelstrahl die Charakteristik des Punktes ist. Für alle reellen Werthe von P erhält man einen Büschel von linearen Complexen, dessen specielle Complexe aus den die Nullgerade und den die Basis schneidenden Strahlen bestehen. Zwei lineare Complexe, die zu entgegengesetzten Werthen von P gehören, liegen in Involution.

Jeder lineare Complex, der zu einem von Null und unendlich verschiedenen P gehört, besteht zugleich aus den Charakteristiken aller der heterotropen Punkte, deren Gewicht $p=x_1y_2-y_1x_2$ den constanten Werth $-1:4P$ besitzt, denn aus

$$X=-\frac{y_2+y_1i}{2p}, \qquad Y=\frac{x_2+x_1i}{2p}$$

folgt

$$P=-1:4p.$$

Die Coordinaten $X|Y$ aller Geraden eines nicht auf ST liegenden von $0|0$ verschiedenen Punktes $a|b$ erhält man mit Hülfe eines complexen Parameters z, indem man

$$X=-\frac{1}{a+bz}, \qquad Y=-\frac{z}{a+bz}$$

setzt. Für $z=0$ und $z=\infty$ ergeben sich die Coordinaten des Punktes, für $z=-a:b$ seine Verbindungslinie mit dem Nullpunkt, für $z=-(a_1-a_2i):(b_1-b_2i)$ seine Charakteristik. Für $z=1$ wird

$$X=Y=-\frac{1}{a+b};$$

dieser Strahl steht auf den beiden Coordinatenebenen senkrecht, wenn man mit *Weierstrass* als solche zwei parallele congruente *Gauss*sche Ebenen nimmt, deren Nullpunkte auf einer auf beiden Ebenen senkrechten Geraden liegen.

Das Doppelverhältniss (*DV*) von 4 Geraden eines Punktes wird definirt als das *DV* ihrer *X*-Coordinaten oder ihrer *Y*-Coordinaten. Diese beiden *DV* haben gleichen Werth und denselben Werth hat auch das aus den Parameterwerthen der 4 Geraden gebildete *DV*.

Zwei Punkte werden dadurch projectisch auf einander bezogen, dass man die Geraden beider Punkte durch Parameter z und z' darstellt und diese durch eine Gleichung von der Form

$$z' = \frac{\nu + zn}{\mu + zm}$$

von einander abhängen lässt, wo $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$, etc. ist. Die zu entsprechenden Werthen von z und z' gehörigen Geraden sind einander zugeordnet. Je 4 Gerade des einen Punktes haben dann dasselbe *DV* wie die entsprechenden Geraden des anderen.

Die projectivische Beziehung ist bestimmt, wenn man drei Geraden des einen Punktes drei beliebige Gerade des anderen Punktes zuweist, denn dadurch sind die Verhältnisse $\mu : m : \nu : n$ bestimmt.

Bezeichnet man den zu z conjugirten Werth mit $\bar{z}$ und setzt

$$z' = \frac{\nu + \bar{z}n}{\mu + \bar{z}m},$$

so sind die Punkte, deren Gerade durch die Parameter z und z' bestimmt werden, nach einem Ausdruck des Herrn *Segre* antiprojectivisch auf einander bezogen. Die *DV* von entsprechenden Geradenquadrupeln sind dabei conjugirt complex.*)

Wenn das *DV* von 4 Geraden eines Punktes einen reellen Werth hat, z. B. 1 bei harmonischer Lage der Geraden, so sagt man nach *v. Staudt,* dass sie zu derselben *Kette***) des Punktes gehören. Bei projectivisch auf einander bezogenen Punkten entspricht also einer Kette des einen eine Kette des anderen. Von einer Kette können drei Gerade eines Punktes beliebig angenommen werden; sie besteht aus den Geraden der

---

*) An die Anmerkung auf Seite 234 anknüpfend, möge hier bemerkt werden, dass 4 Punkte einer Geraden und ihre Charakteristiken antiprojectivisch auf einander bezogen sind. Die 4 Charakteristiken haben nämlich als Gerade des dem System Σ dual entsprechenden Systems betrachtet ein *DV*, weil sie zu derselben „Ebene" gehören, und dieses *DV* hat den conjugirt complexen Werth zu dem *DV* der 4 Punkte.

**) Beiträge zur Geometrie der Lage. § 15.

Regelschar, die durch diese Geraden bestimmt wird. Die Regelschar geht in einen Kegel über, wenn der Punkt atrop ist.

Alle Geraden $X|Y$ einer beliebigen Kette des Punktes $a|b$ erhält man, wenn man in

$$X = -\frac{\mu + km}{(\mu + km)a + (\nu + kn)b}, \qquad Y = -\frac{\nu + kn}{(\mu + km)a + (\nu + kn)b}$$

den Parameter k alle reellen Werthe durchlaufen lässt.

Da $(\nu + kn):(\mu + km)$ und damit X und Y von k unabhängig wären, wenn $\nu m - \mu n = 0$ wäre, so möge dieser Ausdruck — die Determinante der Kette — von Null verschieden vorausgesetzt werden. Die Eigenschaften der Kette hängen hauptsächlich von den Werthen der Grössen

$$\mu_1 m_2 - \mu_2 m_1 = \alpha, \qquad \nu_1 n_2 - \nu_2 n_1 = \beta,$$
$$\mu_1 n_2 - \mu_2 n_1 + \nu_1 m_2 - \nu_2 m_1 = \gamma, \qquad \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 - \nu_1 m_1 - \nu_2 m_2 = \delta$$

ab; $\gamma^2 + \delta^2 - 4\alpha\beta$ ist die Norm der Determinante, also eine positive Zahl.

Dass 4 Gerade, deren Coordinaten durch die angegebenen Functionen des reellen Parameters k bestimmt werden, zu einer Kette gehören, folgt daraus, dass ihr DV gleich dem ihrer Parameterwerthe ist.

Die Spuren der zu einer Kette gehörenden Geraden in den Coordinatenebenen liegen, wie man durch Trennung des Reellen und Imaginären und Elimination von k findet, auf einem durch die Punkte J und J' der Basis gehenden Kegelschnitt, der in Uebereinstimmung mit der hier gebrauchten Benennung schon im § 2 als Kette bezeichnet wurde.

Eine Gerade, deren Coordinaten

$$-\frac{1}{a + bz} \Big| -\frac{z}{a + bz}$$

sind, liegt auf der einen oder der anderen Seite der Kette, je nachdem in der Gleichung

$$z = \frac{\nu + Kn}{\mu + Km}$$

die complexe Zahl K, oder auch je nachdem das DV, das die Gerade mit 3 festen Geraden der Kette bestimmt, einen positiven oder einen negativen imaginären Bestandtheil hat.

Durch einen Punkt der Nullgeraden, der die Gleichung

$$aX + bY = 0$$

hat, gehen alle Geraden mit den Coordinaten

$$bz | -az.$$

Eine Kette eines solchen Punktes besteht aus den Geraden

$$b \cdot \frac{\nu + k n}{\mu + k m} \Big| -a \cdot \frac{\nu + k n}{\mu + k m}.$$

Eine Kette des Nullpunktes endlich wird von Geraden gebildet, deren Gleichungen die Form

$$(\nu + k n)x - (\mu + k m)y = 0$$

haben. Wenn in diesem Falle die Constanten der Kette so beschaffen sind, dass $(\nu + k n) : (\mu + k m)$ für alle reellen Werthe von k reell ist, so erhält man insbesondere die Kette der Feldgeraden.

Alles, was über die Parameterdarstellung der Geraden eines Punktes und die von ihnen gebildeten Ketten gesagt ist, überträgt sich dual entsprechend auf die Punkte einer Geraden. Nur kann man sich die aus ∞^1 Punkten bestehenden Ketten einer Geraden natürlich nicht durch Regelscharen unmittelbar veranschaulichen, sondern erst durch Vermittelung der Charakteristiken.

Es liegt nahe, den Complex zu bestimmen, der aus den ∞^3 Geraden der die Kette bildenden Punkte besteht. Wenn die Gerade nicht durch den Nullpunkt geht, ist dieser Complex ein *tetraedaler* oder *Reye*scher Complex, dessen Haupttetraeder von zwei Ebenen der ζ-Axe (der Basis) und den conjugirt imaginären Ebenen

$$(A_1 \pm A_2 i)\xi + (B_1 \pm B_2 i)\eta \pm i\zeta + 1 = 0$$

gebildet wird, die die Punkte J und J' der Basis mit der Geraden $A|B$ verbinden. Das DV der Schnittpunkte eines beliebigen Complexstrahles mit den Tetraederebenen ergiebt sich gleich

$$\frac{\delta - \sqrt{4\alpha\beta - \gamma^2}}{\delta + \sqrt{4\alpha\beta - \gamma^2}},$$

ist also von $A|B$ unabhängig.

Wenn $A|B$ die Nullgerade ist und zugleich die Kette dahin specialisirt wird, das $\alpha = \beta = \delta = 0$, $\gamma \gtrless 0$ ist, so erhält man den Complex

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 = 0$$

aller Geraden mit rein imaginärem Coordinatenverhältniss. Das Haupttetraeder besteht in diesem Falle aus den beiden Coordinatenebenen und den Ebenen $\zeta = \pm i$, das DV ist gleich -1. Auch der specielle lineare Complex

$$X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = 0$$

der die Nullgerade in atropen Punkten schneidenden Geraden mit reellem Coordinatenverhältniss ist als besonderer Fall in dem allgemeinen Kettencomplex enthalten.

Eine eigentliche Gerade besitzt eine ausgezeichnete Kette, nämlich die ihrer atropen Punkte, die sich ergiebt, wenn $(\nu+k n):(\mu+k m)$ für alle reellen Werthe von k reell ist.

Wenn die Gerade, deren Ketten betrachtet werden, eine Feldgerade ist, so gehen die Ketten in die früher schon so benannten Kegelschnitte über, und wenn zu den Punkten der Kette der Nullpunkt gehört, in die geraden Linien der Feldgeraden.

Die Verbindungslinien der Punkte einer auf einer Geraden liegenden Kette mit einem Punkt ausserhalb der Geraden bilden eine Kette; die Geraden einer Kette eines Punktes schneiden eine nicht zu dem Punkt gehörende Gerade in einer Kette, wie das für den Fall, dass die Gerade eine der Coordinatenebenen ist, schon erwähnt wurde.

Statt die Parameterdarstellung zu benutzen, die ich hier bevorzugt habe, weil die Coordinaten des Grundgebildes darin vorkommen, hätte man auch z. B. alle Punkte der Verbindungslinie der Punkte $a|b$ und $a'|b'$ durch

$$a+\lambda(a'-a) \mid b+\lambda(b'-b)$$

oder durch

$$\frac{a+\lambda a'}{1+\lambda} \mid \frac{b+\lambda b'}{1+\lambda}$$

darstellen können, wo λ ein complexer Parameter ist. Auch hierbei ist das DV von 4 Elementen gleich dem DV ihrer Parameterwerthe.

Auf die lineare Transformation der Σ-Coordinaten will ich hier nicht eingehen, weil das zu weit führen würde. Es möge jedoch bemerkt werden, dass natürlich, auch wenn man die Punkte und Geraden von Σ durch eine lineare Transformation mit neuen Coordinaten bezeichnet, der ursprüngliche Nullpunkt und die Geraden des Nullpunktes geometrisch ausgezeichnete Elemente bleiben, da ja die Punkte von Σ zerfallende oder nicht zerfallende Congruenzen sind, zu deren Strahlen immer die Basis gehört. Wenn man statt des ausgezeichneten Coordinatendreiecks, von dem zwei Seiten Feldgeraden sind, ein beliebiges Coordinatendreieck mit drei eigentlichen Geraden als Seiten einführt, so bietet es natürlich keinen Vortheil mehr, eine Seite vor den anderen auszuzeichnen, und man wird deshalb in diesem Falle homogene Coordinaten benutzen. Ich werde aber das bisherige Coordinaten-

system auch im Folgenden beibehalten, weil die atropen Punkte in diesem auf die einfachste Weise, nämlich durch ihr reelles Coordinatenverhältniss gekennzeichnet sind.

§ 7. Die Curven und Congruenzen in Σ.

Eine Σ-Curve wird ebenso definirt wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie der Ebene, indem man z. B. die Coordinaten eines Punktes der Curve als Functionen eines Parameters darstellt, der aber hier alle complexen Werthe durchläuft. Alle elementaren Fragen der projectivischen Geometrie einer ebenen Curve werden auf die Geometrie von Σ übertragen und in bekannter Weise beantwortet. Eine algebraische Curve n-ter Ordnung z. B. hat mit jeder Geraden n, mit einer Curve m-ter Ordnung mn Punkte gemeinsam, die alle reale Gebilde sind, und zwar im allgemeinen heterotrope Punkte. Mit einer Feldgeraden hat die Curve n Punkte gemeinsam, die — eventuell mit Ausnahme des Nullpunktes — alle atrop sind. Eine beliebige Curve n-ter Ordnung hat deshalb ∞^1 atrope Punkte, die den *Weg* der atropen Punkte oder kurz den atropen Weg der Curve bilden; er entspricht dem *Lie*schen „Nullstreifen“. Nur wenn die Σ-Curve aus lauter Geraden des Nullpunktes besteht, fehlt ihr der atrope Weg; dieser Fall soll im Folgenden ausgeschlossen bleiben. Der atrope Weg, eine Raumcurve im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes, ist ein bequemes Mittel, um die Curve zur Anschauung zu bringen, gerade so wie bei einer eigentlichen Geraden ja auch die Kette der atropen Punkte dazu dient. Wenn eine Curve, wie dies vorausgesetzt werden möge, durch analytische Functionen definirt ist, so stimmen die Curven mit demselben atropen Weg auch in ihren ∞^2 heterotropen Punkten überein.

Ist die Σ-Curve durch eine Gleichung mit reellen Coefficienten definirt, so liegt, falls sie nicht etwa nulltheilig ist, der atrope Weg oder ein Zweig von ihm in der Ebene σ und bildet die durch die Gleichung bestimmte ebene Curve, auf die man gewöhnlich allein Rücksicht nimmt. Ein Zweig des atropen Weges, der die Ebene σ in einem nicht auf der eben erwähnten Curve liegenden Punkte schneidet, bestimmt als seinen Schnittpunkt einen isolirten Punkt der Curve, der also in Σ nicht isolirt ist.

Die Grenzlage, der die Verbindungslinie eines nicht singulären Punktes der Σ-Curve mit einem benachbarten Punkte, d. h. einem solchen, dessen Coordinaten sich von denen des festen Punktes nur wenig unterscheiden, zustrebt, ist unabhängig davon, wie sich der Nachbarpunkt dem festen Punkt

nähert. Das folgt aus der Fundamentaleigenschaft des Differentialquotienten einer Function complexen Arguments. Die Tangente einer Σ-Curve hat deshalb dieselbe Gleichung wie die einer reellen ebenen Curve. Sind $x|y$ die Coordinaten des Berührungspunktes und $X|Y$ die der Tangente, so ist, wenn die Ableitung nach dem Parameter durch einen Strich bezeichnet wird,

$$y' : x' = -X : Y$$

oder, wenn x die unabhängige Variabele ist,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y}.$$

Der Differentialquotient ist also gleich dem negativen reciproken Werth des Coordinatenverhältnisses der Tangente oder auch gleich dem Coordinatenverhältniss des Punktes der Nullgeraden, der von der Tangente getroffen wird, ganz analog wie in der reellen Geometrie der Ebene.

Wenn der Berührungspunkt atrop ist, so hat er im allgemeinen zwei benachbarte atrope Punkte. Die atrope Kette der Tangente ist in diesem Falle die Tangente im gewöhnlichen Sinne des Wortes an dem atropen Weg, der durch den Punkt geht. Ist die Tangente eine Feldgerade, wobei der Berührungspunkt — wenn es nicht der Nullpunkt ist — atrop ist, so ist die Feldgerade nach gewöhnlicher Ausdrucksweise eine Tangentialebene des atropen Weges und eine — oder wenn der atrope Weg sich in dem Punkte verzweigt — mehrere gerade Ketten der Feldgeraden sind die gewöhnlichen Tangenten des atropen Weges. Dabei hat aber die Curve thatsächlich nur eine Tangente in dem Punkte, nämlich die Feldgerade, und ein solcher Punkt ist auch in dem Falle der Verzweigung des atropen Weges im allgemeinen nicht ein Doppelpunkt der Σ-Curve und entspricht auch keineswegs einem *Riemann*schen Verzweigungspunkt der durch die Gleichung der Curve definirten Function complexen Arguments.

Von einem beliebigen Punkt aus kann man eine bestimmte Zahl von Tangenten an eine algebraische Σ-Curve legen. Diese Zahl N, die Klasse der Curve, und ebenso auch die Singularitäten der Curve und das von ihnen abhängige Geschlecht werden in bekannter Weise bestimmt. Alle N Tangenten sind real. Dagegen können die Tangenten, die in einer beliebigen Ebene liegen, zum Theil oder alle nicht real sein, denn bei ihrer Bestimmung verlässt man das Gebiet von Σ. Soll nämlich die Gerade $X|Y$ — genau genommen ihre atrope Kette — in der Ebene mit den reellen

Coordinaten $u|v|w$ liegen, so müssen die Gleichungen

$$X_1 + w X_2 = u,$$
$$Y_1 + w Y_2 = v$$

erfüllt sein. Diese linearen Gleichungen zusammen mit den beiden Gleichungen N-ten Grades, in die man die Gleichung N-ten Grades in $X|Y$ der die Curve einhüllenden Tangentencongruenz zerlegen kann, bestimmen die Coordinatenbestandtheile X_1 etc. derartig, dass man N^2 Werthsysteme bekommt, die aber nicht alle reell zu sein brauchen. Die Tangentencongruenz ist also vom Bündelgrad N (alle Tangenten eines Punktes sind real) und vom Feldgrad N^2 (die Tangenten einer Ebene sind nicht immer alle real).

Die Anzahl der Punkte, die der atrope Weg mit einer beliebigen Ebene gemeinsam hat, oder die Ordnung dieser Raumcurve im gewöhnlichen Sinne, kann folgendermassen bestimmt werden. Man führe in die Gleichung der Curve statt der $x|y$-Coordinaten die reellen Coordinaten $\xi|\eta|\zeta$ ein, multiplicire mit dem Generalnenner $(1+\zeta i)^n$ und trenne das Reelle vom Imaginären. So erhält man zwei Gleichungen n-ten Grades in ξ, η, ζ, die zwei Flächen n-ter Ordnung bestimmen. Diese schneiden sich in einer Raumcurve n^2-ter Ordnung, dem atropen Weg der Σ-Curve, der also mit einer beliebigen Ebene n^2 Punkte gemeinsam hat. Diese Punkte sind nicht alle real, denn sobald man eine beliebige Ebene in Betracht zieht, geht man über das Gebiet von Σ hinaus. Auch ist ein Ebenenbüschel von vornherein bekannt, in dessen Ebenen, wenn die Curve nicht durch den Nullpunkt geht, genau n immer reale Punkte des atropen Weges liegen, nämlich das Büschel der Feldgeraden, als Σ-Gerade hat jede Feldgerade n reale Punkte mit der Curve gemeinsam.

Der atrope Weg kann auch als die reelle Curve des imaginären Kegels betrachtet werden, der den Punkt J der Basis mit der in der Ebene σ liegenden imaginären Curve verbindet, oder als Schnitt dieses Kegels mit seinem conjugirten.

Die Berührungspunkte der Tangenten, die vom Mittelpunkt T des x-Coordinatenbündels aus an die Σ-Curve gelegt werden können, entsprechen den nicht singulären *Riemann*schen Verzweigungspunkten, wenn y als Function von x betrachtet wird. Sie unterscheiden sich geometrisch natürlich im allgemeinen nicht von einem beliebigen Curvenpunkte. Die n Schnittpunkte eines beliebigen x-Coordinatenstrahles mit der Curve ergeben als die zu-

gehörigen y-Coordinaten die n Werthe der Function y von x. Man kann sich diese Schnittpunkte z. B. durch ihre Charakteristiken kenntlich gemacht denken; wenn von den n Charakteristiken zwei oder mehrere zusammenfallen, ist der Punkt ein Verzweigungspunkt. Darüber, ob der Punkt ein singulärer Punkt ist, giebt dann die Bestimmung der Tangente weiteren Aufschluss.

Alles, was über die Σ-Curven ausgesagt ist, gilt dual entsprechend von den Σ-Congruenzen, die in derselben Weise durch Geradencoordinaten bestimmt werden wie die Curven durch Punktcoordinaten. Hierbei haben die den atropen Punkten entsprechenden, die Nullgerade schneidenden Geraden der Congruenz kein besonderes geometrisches Interesse. Um sich eine Congruenz vorzustellen, bedarf man aber auch eines dem atropen Weg analogen Hülfsmittels nicht, da jede Gerade der Congruenz, abgesehen von der bei einer algebraischen Congruenz endlichen Zahl von uneigentlichen Geraden, durch ihre atrope Kette in der Vorstellung vertreten wird.

Die Congruenz, die eine gegebene Curve umhüllt, kann sehr gut dazu benutzt werden, den ganzen Verlauf der Curve, der ja durch den atropen Weg zwar bestimmt, aber nicht vollständig veranschaulicht wird, der Vorstellung zugänglich zu machen. Zu demselben Zweck kann man auch die Congruenz verwenden, die von den Charakteristiken der heterotropen Punkte der Curve gebildet wird.

§ 8. Die Kegelschnitte in Σ.

Die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung sei

$$u \equiv ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy = 0,$$

wo die Coefficienten $a = a_1+a_2 i$ etc. zunächst ganz allgemein vorausgesetzt werden. Der atrope Weg ist der Schnitt der beiden nach der Vorschrift des vorigen Paragraphen bestimmten reellen Flächen zweiten Grades

$$P \equiv a_1\xi^2+b_1\eta^2-c_1\zeta^2+c_1-2f_2\eta\zeta-2g_2\xi\zeta+2h_1\xi\eta+2g_1\xi+2f_1\eta-2c_2\zeta = 0,$$
$$Q \equiv a_2\xi^2+b_2\eta^2-c_2\zeta^2+c_2+2f_1\eta\zeta+2g_1\xi\zeta+2h_2\xi\eta+2g_2\xi+2f_2\eta+2c_1\zeta = 0,$$

also eine Raumcurve 4. Ordnung, 1. Art. Die Flächen schneiden die ζ-Axe in den realen Punkten

$$(-c_2 \pm \sqrt{c_1^2+c_2^2}) : c_1 \quad \text{und} \quad (c_1 \pm \sqrt{c_1^2+c_2^2}) : c_2,$$

die sich harmonisch trennen. Daraus folgt, was ja auch aus den allgemeinen

Betrachtungen des § 7 schon bekannt war, dass der atrope Weg immer real ist.

Von den vier Kegeln zweiter Ordnung, die sich durch die Curve vierter Ordnung legen lassen, haben zwei ihre Scheitelpunkte in den Punkten J und J' der Basis. Wenn $c = 0$ ist, so fallen auch die Scheitel der beiden anderen Kegel mit diesen Punkten zusammen, und der atrope Weg zerfällt in die Basis und eine Raumcurve dritter Ordnung, die durch J und J' geht.

Wenn die Coefficienten von $u = 0$ alle reell sind, bleibt die Fläche $P = 0$ im allgemeinen eine nicht singuläre Fläche, $Q = 0$ dagegen geht über in

$$2f_1\eta\zeta + 2g_1\xi\zeta + 2c_1\zeta = 0$$

und zerfällt in die beiden Ebenen

$$\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \nu \equiv g_1\xi + f_1\eta + c_1 = 0.$$

Die erste Ebene ist die Ebene σ, die zweite ist die Polarebene des Nullpunktes N von σ in Bezug auf $P = 0$ und geht durch den Punkt M oder $0|0|\infty$. Die Fläche $P = 0$ schneidet die ζ-Axe in den Punkten $0|0|\pm 1$. Wenn $P = 0$ nicht geradlinig ist, so liegt entweder N oder M im Innern der Fläche, und je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, schneidet $\nu = 0$ oder $\zeta = 0$ die Fläche nicht, während bezw. $\zeta = 0$ oder $\nu = 0$ die Fläche in einem realen Kegelschnitt schneidet, der also in diesem Falle allein den atropen Weg von $u = 0$ bildet. Jede Feldgerade hat mit diesem Kegelschnitt, der die Basis umschliesst, zwei reale Punkte gemeinsam. Im ersten Falle ist der in der Ebene σ liegende reelle Kegelschnitt

$$w \equiv a_1\xi^2 + b_1\eta^2 + c_1 + 2f_1\eta + 2g_1\xi + 2h_1\xi\eta = 0$$

die reelle ebene eintheilige Curve, die in der elementaren analytischen Geometrie allein berücksichtigt zu werden pflegt. Im zweiten Falle ist diese Curve nulltheilig, aber in $\nu = 0$ liegt dann ein realer Kegelschnitt.*)

Ist $P = 0$ eine geradlinige Fläche, so schneidet sowohl $\zeta = 0$, als auch $\nu = 0$ die Fläche in einem realen Kegelschnitt,*) der erstere ist der gewöhnlich allein in Betracht gezogene. Die beiden Kegelschnitte durchschneiden sich auf der Polaren von N in Bezug auf den ersten von ihnen. Diese Schnittpunkte sind zugleich die Berührungspunkte der vom Nullpunkt aus an $u = 0$ gelegten Tangenten, die also jetzt Feldgerade sind.

---

*) Der in $\nu = 0$ liegende Kegelschnitt entspricht der „reellen Nebencurve“ des Herrn *Suhle,* dessen Arbeiten ich in § 1 citirt habe.

Auf die weitere Behandlung der Gleichung $u = 0$ muss ich hier verzichten; ich verweise auf die in dieser Beziehung ausführlichere Abhandlung von *Lie* bezw. auf die Bearbeitung von Herrn *Domsch*. Nur auf einen Punkt möchte ich hinweisen, in dem ich mich mit *Lie* (oder Herrn *Domsch*) im Widerspruch befinde, weil er mir von principieller Bedeutung zu sein scheint. *Lie* ist nämlich der Ansicht, dass die projectivische Erzeugung eines reellen Kegelschnittes sich nicht auf die Σ-Kegelschnitte im allgemeinen übertragen liesse, sondern dass bei projectivischer Beziehung der Strahlen zweier Punkte immer ein solcher Kegelschnitt erzeugt würde, dessen atroper Weg (Nullstreifen) eine Raumcurve dritter Ordnung wäre. Das ist nicht zutreffend, wenigstens wenn man die von mir gegebene Definition der projectivischen Beziehung zu Grunde legt, bei der man genau wie in der reellen Geometrie der Ebene einen durch 5 beliebige Punkte gegebenen, also vollkommen allgemeinen Σ-Kegelschnitt durch projectivische Beziehung der Strahlen von zwei der 5 Punkte erhält. Dieser Unterschied zwischen den Resultaten, zu denen die Methode *Lie*s und die meinige führt, erklärt sich wohl nicht daraus, dass das von mir definirte System Σ mit dem räumlichen System von *Lie* und also der atrope Weg mit dem Nullstreifen allerdings nicht identisch sind, sondern wahrscheinlich aus einer verschiedenen Auffassung der Projectivität, die bei Herrn *Domsch* nicht ausführlich definirt ist. Es wird nämlich (Seite 16) behauptet, die Strahlen zweier projectivisch auf einander bezogenen Punkte erzeugten in einer beliebigen Ebene zwei collineare Punktfelder. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall, wenn die projectivische Beziehung so definirt wird, wie ich es gethan habe.

§ 9. Maassbestimmungen in Σ.

Bis jetzt sind nur die von jeder Maassbestimmung unabhängigen Eigenschaften des Systems Σ betrachtet worden. Um auch metrische Sätze der reellen Geometrie der Ebene auf Σ zu übertragen, kann man als fundamentale Maassfunctionen den Dreiecksinhalt und dessen duales Analogon zu Grunde legen. Der „Punktinhalt“ eines Dreiecks wird mittelst der Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks ebenso definirt wie in der elementaren analytischen Geometrie der Ebene; ein Dreieck im gewöhnlichen Sinne des Wortes, das auf einer Feldgeraden liegt, hat dabei natürlich den Inhalt Null, weil seine drei Ecken auf derselben Geraden liegen. Der „Strahleninhalt“ eines Dreiseits wird aus den Coordinaten der drei Seiten ebenso abgeleitet wie der Punktinhalt aus den Coordinaten dreier Punkte. Nimmt

man zu diesen Maassfunctionen, die durch die gegenseitige Lage dreier Elemente bestimmt sind, noch die Differenzen zwischen den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Geraden hinzu, so kann man viele Sätze der ebenen Maassgeometrie auf Σ übertragen.*)

Wenn man jedoch verlangt, dass die Maassfunctionen bei ∞^3 Collineationen (bezw. ∞^6, da jeder Coefficient einer linearen Transformation ∞^2 complexe Werthe annehmen kann), die den Bewegungen einer reellen Ebene entsprechen, unverändert bleiben, so muss man eine ***Cayley***sche Maassbestimmung anwenden.**) Eine solche erhält man, wenn man eine Curve zweiten Grades $u = 0$ als absolutes Gebilde einführt, das bei den als Bewegungen bezeichneten Collineationen in sich selbst übergeht. Der Abstand zweier Punkte ist dann bekanntlich der mit einer Constanten multiplicirte Logarithmus des DV, das die beiden Punkte mit den Punkten bestimmen, in denen ihre Verbindungslinie die Curve $u = 0$ schneidet. Ebenso ist der Winkel zweier Geraden der mit einer Constanten multiplicirte Logarithmus des DV, das die Geraden mit den von ihrem Schnittpunkt aus an die absolute Curve gelegten Tangenten bestimmen. Der Dreiecksinhalt wird jetzt selbstverständlich anders definirt als bei der elementaren Maassbestimmung, die die Coordinaten benutzt, ohne einen Kegelschnitt als absolutes Gebilde zu betrachten.

Wenn die Curve $u = 0$ complexe Coefficienten hat, so eignet sich diese *Cayley*sche Maassbestimmung übrigens nicht mehr dazu, als eine Veranschaulichung der Nicht-Euklidischen Geometrie zu dienen. Jede Gerade hat zwei — wenn sie Tangente von $u = 0$ ist, zusammenfallende — unendlich ferne Punkte, ihre Schnittpunkte mit $u = 0$, aber sie wird von jeder anderen Geraden in einem Punkte geschnitten, obgleich durch jeden Punkt zwei

---

*) Es möge hier darauf hingewiesen werden, dass Herr ***Minkowski*** in seiner „Geometrie der Zahlen“ allgemeine homogene Functionen der Coordinatendifferenzen als Verallgemeinerungen des elementaren Distanzbegriffes einführt, und dass auch bei ihm das Volumen als fundamentale Maassfunction benutzt wird. Dem Gedanken, dass man in der oben angedeuteten Richtung die Euklidische Maassbestimmung verallgemeinern kann, habe ich in der Arbeit „Ueber den Dreiecksinhalt und sein duales Analogon“ im 114. Bande dieses Journals Ausdruck zu geben versucht.

) Vergl. die Arbeiten des Herrn ***Klein*: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“, Math. Ann. Bd. 4 und 6, sowie „Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie“ und die Einleitung zu ***Fricke-Klein***'s „Theorie der automorphen Functionen“, ferner ***Clebsch-Lindemann***: „Vorlesungen über Geometrie“, Bd. II.

„Parallelen“ zu der Geraden gezogen werden können, die sie nämlich in ihren unendlich fernen Punkten schneiden. Wenn $u = 0$ reelle Coefficienten hat, bleibt für die reellen Gebilde der Ebene σ der Unterschied zwischen hyperbolischer und elliptischer Geometrie bestehen, und wenn z. B. insbesondere die Curve, als Klassencurve betrachtet, die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 0$$

hat, d. h. wenn sie in die beiden auf der Nullgeraden ST liegenden „Kreispunkte“ $X \pm iY = 0$ zerfällt, so wird die Maassbestimmung parabolisch und geht in die Euklidische über, wenn noch die Nullgerade unendlich fern angenommen wird.

Bei der parabolischen Maassbestimmung bleibt die Definition des Winkels zweier Geraden ohne weiteres gültig; als die Constante, mit der der Logarithmus des DV der beiden Geraden und der Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Kreispunkten zu multipliciren ist, nimmt man jetzt bekanntlich $-\frac{1}{2}i$. Die Bedingung dafür, dass zwei Gerade $X|Y$ und $X'|Y'$ einen rechten Winkel einschliessen, oder zu einander normal sind, ist dann

$$XX' + YY' = 0,$$

da zwei Gerade, deren Coordinaten diese Bedingung erfüllen, die Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Kreispunkten harmonisch trennen, so dass also ihr Winkel $= -\frac{1}{2}i \log(-1) = \frac{1}{2}\pi$ ist. Zwei Gerade sind parallel, wenn sie durch denselben Punkt der Nullgeraden ST gehen; der Winkel, den zwei solche Linien einschliessen, ist nämlich gleich Null, oder das entsprechende DV gleich 1, weil ja die Kreispunkte auf der Nullgeraden liegen. Durch einen Punkt geht jetzt zu einer Geraden nur eine Parallele, nämlich der durch den Punkt gehende Strahl des durch die Gerade und die Nullgerade bestimmten Punktes.

Die Entfernung zweier Punkte kann bei der parabolischen Maassbestimmung nicht unmittelbar mittelst des Ausdrucks $k \log DV$ definirt werden. Das DV ist jetzt constant gleich 1, weil die undualistisch specialisirte absolute Curve $u = 0$, als Ordnungscurve betrachtet, die doppelt zu nehmende Nullgerade ist. Nach Annahme eines unendlich grossen k kann man jedoch mittelst eines Grenzüberganges, wie Herr *Klein* gezeigt hat, den bekannten elementaren Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte ableiten. Zu demselben Ausdruck gelangt man auch durch die folgende Ueberlegung. Zwei parallele Gerade sind zu derselben dritten Geraden normal;

die Entfernung der Schnittpunkte der parallelen Geraden mit einer zu ihnen normalen Geraden soll nun so definirt werden, dass sie unverändert bleibt, welche dritte Gerade auch die beiden festen Parallelen normal schneidet, und dass sie verschwindet, wenn die beiden Parallelen zusammenfallen. Diese beiden Bedingungen führen durch eine einfache Rechnung zu dem Resultat, dass die Entfernung der beiden Punkte $x|y$ und $x'|y'$ eine Function von $(x'-x)^2+(y'-y)^2$ sein muss. Man setzt sie gleich $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$, um einen Ausdruck zu erhalten, der in eine Coordinatendifferenz übergeht, wenn die beiden Punkte auf demselben Coordinatenstrahl liegen. Hieraus folgt dann auch unmittelbar, dass der Abstand des Punktes $x'|y'$ von der Geraden $A|B$ gleich

$$\frac{Ax'+By'+1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ist, wenn man als diesen Abstand die Entfernung des Punktes $x'|y'$ von dem Fusspunkt der von $x'|y'$ auf $A|B$ gefällten Normalen definirt.

§ 10. Zahlentheoretische Anwendungen.

Die *Gauss*sche Function $[\gamma]$ kann bekanntlich definirt werden als die Anzahl von positiven ganzen Zahlen, deren absoluter Betrag $\leqq|\gamma|$ ist. Diese Auffassung von $[\gamma]$ kann man auf einen complexen Werth von γ übertragen und mit Hülfe des Systems Σ gewisse Sätze der Zahlentheorie, in denen die Function $[\gamma]$ auftritt, auf complexe Zahlen ausdehnen. Schwieriger scheint es zu sein, auch die andere Bedeutung von $[\gamma]$, wonach dieser Ausdruck die grösste ganze Zahl bezeichnet, die $\leqq\gamma$ ist, mit Erfolg im Gebiete der complexen Zahlen zu verwenden*); gerade diese Bedeutung von $[\gamma]$ kommt aber, wie ich glaube, bei dem von *Gauss* nicht veröffentlichten Beweis des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes in erster Linie in Betracht. Da sich jedoch der *Eisenstein*sche geometrische Beweis des Reciprocitätsgesetzes so umformen lässt, dass dabei die Function $[\gamma]$ nur in der zweiten Bedeutung vorkommt, so hoffe ich, dass das System Σ sich auch bei der zweiten Bedeutung der Function $[\gamma]$ mit complexem Argument nützlich erweisen wird. Hier beschränke ich mich darauf, mit $[\gamma]$ eine gewisse Anzahl von ganzen Zahlen zu bezeichnen.

Die Function $y=f(x)$ erfülle in dem Bereich $\mathfrak{b}$ folgende Bedingungen:

*) Vergl. meine Arbeit „Ueber die Function $E(x)$ mit complexem Argument“ im 110. Band dieses Journals und die Ergänzung dazu im III. Bande der Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg.

$f(x)$ habe für jeden in $\mathfrak{b}$ liegenden Werth von x einen einzigen, endlichen Werth, und auch die inverse Function $x = F(y)$ habe für jeden in dem Bereich $\mathfrak{B}$, der durch $\mathfrak{b}$ bestimmt ist, liegenden Werth von y einen einzigen, endlichen Werth. Ferner möge aus der Beziehung

$$|y| \gtreqless |f(x)|$$

folgen

$$|F(y)| \gtreqless |x|.$$

Aus diesen Beziehungen, von denen die erste auch eine Folge der zweiten ist, ergiebt sich, dass $f(x)$ und $F(y)$ Functionen sind, deren absoluter Betrag nicht abnimmt, wenn der ihres Argumentes wächst.

Bezeichnet man dann mit $[f(x), \mathfrak{B}]$ die Anzahl der ganzen Zahlen, deren absoluter Betrag nicht grösser als $|f(x)|$ ist und die zugleich dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehören, und mit $[F(y), \mathfrak{b}]'$ die Anzahl der zu $\mathfrak{b}$ gehörenden ganzen Zahlen, deren absoluter Betrag kleiner als $|F(y)|$ ist, sind ferner $[\mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{B}]$ die Anzahlen der den Bereichen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{B}$ angehörenden ganzen Zahlen, *so ist*

$$(1.) \qquad \sum_{x=(\mathfrak{b})} [f(x), \mathfrak{B}] + \sum_{y=(\mathfrak{B})} [F(y), \mathfrak{b}]' = [\mathfrak{b}] \cdot [\mathfrak{B}],$$

wenn in der ersten Summe x alle ganzen Zahlen des Bereiches $\mathfrak{b}$, in der zweiten y alle ganzen Zahlen des Bereiches $\mathfrak{B}$ durchläuft.

Beweis. Unter einem Gitterpunkt verstehe ich, indem ich den von *Eisenstein* für reelle Punkte der Ebene aufgestellten und von Herrn *Minkowski**) verallgemeinerten Begriff auf das System Σ übertrage, einen Punkt, dessen beide Coordinaten ganze Zahlen sind. Dann bestimmen alle von T ausgehenden Coordinatenstrahlen mit ganzzahligen Werthen, die dem Bereich $\mathfrak{b}$ angehören, mit allen von S ausgehenden ganzzahligen Coordinatenstrahlen, die zu $\mathfrak{B}$ gehören, $[\mathfrak{b}] \cdot [\mathfrak{B}]$ Gitterpunkte. Diese Gitterpunkte werden nun nach der *Eisenstein*schen Methode noch auf eine zweite Weise abgezählt, indem man die von ihnen gebildete Mannigfaltigkeit durch die Curve $y = f(x)$ in zwei Theile zerlegt. Zu dem ersten werden die Punkte $x|y$ gerechnet, für die

$$|y| \lesseqgtr |f(x)|$$

ist, zu dem zweiten die, für die $|y| > |f(x)|$ ist. Die Anzahl aller Gitterpunkte des ersten Theiles ist gleich $\sum_{(\mathfrak{b})} [f(x), \mathfrak{B}]$, und weil nach der Voraus-

*) Geometrie der Zahlen, S. 73.

setzung für den zweiten Theil auch $|x| < |F(y)|$ ist, so ist die Anzahl aller Gitterpunkte des zweiten Theiles gleich $\sum_{(\mathfrak{B})}[F(y), \mathfrak{b}]'$.

Beispiel. Setzt man $f(x) = \frac{px}{q}$, wo $p = p_1 + p_2 i$ und $q = q_1 + q_2 i$ relative Primzahlen ohne reellen, von 1 verschiedenen, Theiler sein mögen, und $\mathfrak{b}$ gleich dem Bereich k_q, dem in einer gewöhnlichen *Gauss*schen Ebene das Quadrat mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}q$, $\frac{1}{2}(1+i)q$, $\frac{1}{2}iq$ entspricht, so ist $F(y) = \frac{qy}{p}$ und dem Bereich $\mathfrak{B}$ entspricht das Quadrat k_p mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{2}(1+i)p$, $\frac{1}{2}ip$. Die Voraussetzungen, denen $f(x)$ genügen muss, sind erfüllt. Es ist $[k_q] = \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2 - 1)$, $[k_p] = \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2 - 1)$, wenn die Zahl Null von beiden Bereichen ausgeschlossen wird. Auf dem Rande von k_q und k_p kommen keine ganzen Zahlen vor. Die Gleichung (1.) geht jetzt über in

$$(2.) \qquad \sum_{(k_q)}\left[\frac{px}{q}, k_p\right] + \sum_{(k_p)}\left[\frac{qy}{p}, k_q\right]' = \frac{1}{16}(p_1^2 + p_2^2 - 1)(q_1^2 + q_2^2 - 1).$$

Diese Gleichung ist ein Analogon zu der Formel, auf die Gauss seinen dritten Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes gründet, und die Herleitung ist dem *Eisenstein*schen geometrischen Beweis dieses Satzes genau nachgebildet. Auf einem ganz anderen Wege habe ich dieselbe Gleichung — nachdem ich sie zuerst mittelst des Systems Σ gefunden hatte — im III. Bande der Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, S. 333 abgeleitet.

Für $p = 4+i$, $q = 3+2i$ z. B. enthält der Bereich k_q die Zahlen i, $1+i$, $2i$, der Bereich k_p die Zahlen i, $1+i$, $2i$, $1+2i$. Es ist $\left[\frac{pi}{q}, k_p\right] = 1$, da die Zahl i die einzige dem Bereich k_p angehörende ganze Zahl ist, deren absoluter Betrag $\leqq \left|\frac{(4+i)i}{3+2i}\right|$ ist. Ebenso findet man $\left[\frac{p(1+i)}{q}, k_p\right] = 2$, $\left[\frac{p \cdot 2i}{q}, k_p\right] = 4$ und ferner $\left[\frac{qi}{p}, k_q\right] = 0$, $\left[\frac{q(1+i)}{p}, k_q\right] = 1$, $\left[\frac{q \cdot 2i}{p}, k_q\right] = 2$, $\left[\frac{q \cdot (1+2i)}{p}, k_q\right] = 2$. Die linke Seite von (2.) ist also in diesem Falle gleich $7+5 = 12$ und die rechte ist $\frac{1}{16} \cdot 16 \cdot 12 = 12$.

§ 11. Fortsetzung: die *Möbius*sche Factorentafel in Σ.

Eine zweite Anwendung des Systems Σ knüpft an die ***Möbius***sche Abhandlung „Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel“ (dieses Journal, Band 22, und Gesammelte Werke, Bd. IV) an. Ich benutze jedoch die

Bezeichnung, die ich im 104. Bande dieses Journals in der Arbeit „Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie“ gebraucht habe. Dort habe ich, ohne damals die *Möbius*sche Abhandlung zu kennen, die räumliche Anordnung der Theiler der natürlichen Zahlenreihe angegeben*) und zur Herleitung eines zahlentheoretischen Satzes benutzt, den ich hier auf complexe Zahlen übertragen will. Ich bemerke, dass von *Möbius* nur geometrische Eigenschaften der Factorentafel betrachtet werden, die sich ebenfalls auf das complexe Gebiet übertragen lassen.

Auf den x-Coordinatenstrahlen, wo x alle ganzen Zahlen durchläuft, mögen die Punkte als Theilerpunkte irgendwie markirt gedacht werden, deren y-Coordinate ein Theiler von x ist. Diese Theilerpunkte fallen dann offenbar andererseits zusammen mit den Punkten, die man erhält, wenn man auf den ganzen y-Coordinaten die Vielfachen der Zahl y markirt, mit der der Coordinatenstrahl bezeichnet ist. Die ganzen Punkte der Feldgeraden $x = 0$ gehören alle zu den Theilerpunkten, nur nicht der Nullpunkt, der ebenso wie die übrigen auf $y = 0$ liegenden ganzen Punkte nicht zu den Theilerpunkten zu rechnen ist. Die Theilerpunkte befinden sich auch sämmtlich auf den Geraden des Nullpunktes mit einer Gleichung

$$x = \varkappa y,$$

wo $\varkappa$ eine endliche ganze Zahl ist. Legt man durch den Gitterpunkt $a|0$ eine Gerade mit der Gleichung

$$x = \varkappa y + a,$$

so liegen auf ihr so viele Theilerpunkte wie a Theiler hat; denn ist y ein Theiler von a, so ist das zugehörige x ein Vielfaches von y, $x|y$ also ein Theilerpunkt, ist aber y kein Theiler von a, so ist x kein Vielfaches von y, also $x|y$ kein Theilerpunkt. Für $\varkappa = 0$ erhält man den Coordinatenstrahl $x = a$, auf dem die Theiler von a ursprünglich markirt waren.

Das Theilerpunktsystem ist eine im allgemeinen eindeutige (quadratische) Abbildung des Σ-Gitterpunktsystems, denn wenn $x'|y'$ ein Theilerpunkt ist und $x|y$ der entsprechende Gitterpunkt, so ist

$$x' = xy, \quad y' = y.$$

Allen Punkten von $y = 0$ entspricht also der Punkt $0|0$, dessen Ausnahmestellung schon dadurch hervorgehoben wurde, dass er nicht zu den eigent-

*) Auch Herr *E. Schröder* hat in seiner „Note über die Algebra der binären Relative“ (Math. Annalen, Bd. 46) dasselbe Princip unabhängig von *Möbius* und von mir aufgestellt.

lichen Theilerpunkten gerechnet wurde. Der Geraden $x = a$ entspricht die Gerade $x' = ay'$, der Geraden $y = b$ die Gerade $y' = b$. Die Punkte der Geraden $y = 1$ sind beiden Systemen entsprechend gemeinsam. Einer beliebigen Geraden in Σ entspricht in der Abbildung ein Kegelschnitt und ebenso einer Geraden der Abbildung ein Kegelschnitt in Σ, z. B. der Geraden $x' = n$ der Kegelschnitt $xy = n$.

Eine allgemeine Methode, um mit Hülfe des Theilerpunktsystems Lehrsätze über Theileranzahlen abzuleiten, besteht nun darin, dass man eine durch gegebene Bedingungen abgegrenzte Anzahl von Theilerpunkten auf doppelte Weise abzählt, nämlich erstens auf den x-Coordinatenstrahlen und zweitens auf den y-Coordinatenstrahlen. Die erste Abzählung liefert unmittelbar eine Theilerzahl der Zahlen x eines gegebenen Bereiches und zwar eine Anzahl von Theilern, die eine vorgeschriebene Bedingung erfüllen, die zweite Abzählung liefert eine Anzahl, die sich auf eine Summe von Anzahlen von ganzen Zahlen innerhalb gegebener Bereiche zurückführen lässt.

Es möge z. B. der Bereich der Zahlen x, deren Theiler gezählt werden sollen, aus den Zahlen (excl. Null) gebildet werden, deren absoluter Betrag nicht grösser als $|n|$ ist, wo n eine ganze complexe Zahl ist, und zwar sollen die Theiler y von x gezählt werden, die die Bedingung

$$|y| \gtreqless |\varphi(x)|$$

erfüllen. Dabei sei $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x, die für $|x| > 0$ endlich und von solcher Beschaffenheit ist, dass aus

$$|y| \gtrless |\varphi(x)|$$

folgt

$$|\Phi(y)| \gtrless |x|,$$

wo Φ die inverse Function von φ bedeutet. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass $|\varphi(x)|$ und $|\Phi(y)|$ mit wachsendem Argument nicht zunehmen. Damit die aufzustellende Formel möglichst einfach werde, möge noch vorausgesetzt werden, dass $|\varphi(x)| < 1$ ist für $|x| > |n|$.

Jetzt soll mit $[\gamma]$ bezw. $[\gamma]'$ die Anzahl der Zahlen (excl. Null) bezeichnet werden, deren absoluter Betrag nicht grösser bezw. kleiner ist als $|\gamma|$. ***Dann ist die Anzahl*** τ_φ ***der die Bedingung***

$$|y| \gtreqless |\varphi(x)|$$

erfüllenden Theiler y ***aller von Null verschiedenen Zahlen, deren absoluter***

Betrag $\gtreqless |n|$ *ist,*

$$\tau_\varphi = \sum_y \left[\frac{\Phi(y)}{y}\right], \tag{1.}$$

wo die Summation über alle von Null verschiedenen Zahlen y *zu erstrecken ist.*

Beweis. Durch die Bedingungen $|x| \gtreqless |n|$ und $|y| \lesseqgtr |\varphi(x)|$ wird eine endliche Zahl von Gitterpunkten abgegrenzt. Die Abzählung der Theilerpunkte unter ihnen auf den x-Coordinatenstrahlen liefert die Anzahl τ_φ, die Abzählung der auf dem mit y bezeichneten Coordinatenstrahl liegenden Theilerpunkte liefert als die Anzahl der Theiler, die gleich y sind, die Anzahl der Zahlen x, die durch y theilbar sind und die Bedingung

$$|x| \lesseqgtr |\Phi(y)|$$

erfüllen. Dass diese auf y liegenden Gitterpunkte $x|y$ wirklich alle zu der durch die Bedingungen abgegrenzten endlichen Zahl gehören, folgt daraus, dass nach Voraussetzung die Beziehung

$$|y| \lesseqgtr |\varphi(x)|$$

zu

$$|x| \lesseqgtr |\Phi(y)|$$

führt. Die Anzahl der durch y theilbaren Zahlen x, für die $|x| \lesseqgtr |\Phi(y)|$ ist, ist aber gleich $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$. Dass bei der Abzählung auf den y-Coordinatenstrahlen ein Theiler y von x, dessen absoluter Betrag $> |\varphi(x)|$ ist, nicht mitgezählt wird, folgt daraus, dass die Beziehung

$$|y| > |\varphi(x)|$$

die andere

$$|\Phi(y)| < |x|$$

nach sich zieht, ein Theilerpunkt, der auf diesem x-Coordinatenstrahl liegt, befindet sich also nicht mit unter den Theilerpunkten, deren Anzahl soeben gleich $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ gefunden wurde.

Die Summation kann über alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen y erstreckt werden, weil für jedes $|y|$, das grösser ist als das grösste in Betracht kommende $|\varphi(x)|$, der Ausdruck $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ verschwindet.

Aus der Voraussetzung, dass $|\varphi(x)| < 1$ sein sollte für $|x| > |n|$ folgt, dass auch für kleine Werthe von $|y|$ die rechte Seite der Gleichung (1.) die angegebene Form behält. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist,

lichen Theilerpunkten gerechnet wurde. Der Geraden $x = a$ entspricht die Gerade $x' = ay'$, der Geraden $y = b$ die Gerade $y' = b$. Die Punkte der Geraden $y = 1$ sind beiden Systemen entsprechend gemeinsam. Einer beliebigen Geraden in Σ entspricht in der Abbildung ein Kegelschnitt und ebenso einer Geraden der Abbildung ein Kegelschnitt in Σ, z. B. der Geraden $x' = n$ der Kegelschnitt $xy = n$.

Eine allgemeine Methode, um mit Hülfe des Theilerpunktsystems Lehrsätze über Theileranzahlen abzuleiten, besteht nun darin, dass man eine durch gegebene Bedingungen abgegrenzte Anzahl von Theilerpunkten auf doppelte Weise abzählt, nämlich erstens auf den x-Coordinatenstrahlen und zweitens auf den y-Coordinatenstrahlen. Die erste Abzählung liefert unmittelbar eine Theilerzahl der Zahlen x eines gegebenen Bereiches und zwar eine Anzahl von Theilern, die eine vorgeschriebene Bedingung erfüllen, die zweite Abzählung liefert eine Anzahl, die sich auf eine Summe von Anzahlen von ganzen Zahlen innerhalb gegebener Bereiche zurückführen lässt.

Es möge z. B. der Bereich der Zahlen x, deren Theiler gezählt werden sollen, aus den Zahlen (excl. Null) gebildet werden, deren absoluter Betrag nicht grösser als $|n|$ ist, wo n eine ganze complexe Zahl ist, und zwar sollen die Theiler y von x gezählt werden, die die Bedingung

$$|y| \lessgtr |\varphi(x)|$$

erfüllen. Dabei sei $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x, die für $|x| > 0$ endlich und von solcher Beschaffenheit ist, dass aus

$$|y| \gtrless |\varphi(x)|$$

folgt

$$|\Phi(y)| \lessgtr |x|,$$

wo Φ die inverse Function von φ bedeutet. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass $|\varphi(x)|$ und $|\Phi(y)|$ mit wachsendem Argument nicht zunehmen. Damit die aufzustellende Formel möglichst einfach werde, möge noch vorausgesetzt werden, dass $|\varphi(x)| < 1$ ist für $|x| > |n|$.

Jetzt soll mit $[\gamma]$ bezw. $[\gamma]'$ die Anzahl der Zahlen (excl. Null) bezeichnet werden, deren absoluter Betrag nicht grösser bezw. kleiner ist als $|\gamma|$. ***Dann ist die Anzahl τ_φ der die Bedingung***

$$|y| \lessgtr |\varphi(x)|$$

erfüllenden Theiler y aller von Null verschiedenen Zahlen, deren absoluter

Betrag $\gtrless |n|$ ***ist,***

$$(1.) \qquad \tau_\varphi = \sum_y \left[\frac{\Phi(y)}{y}\right],$$

wo die Summation über alle von Null verschiedenen Zahlen y ***zu erstrecken ist.***

Beweis. Durch die Bedingungen $|x| \gtrless |n|$ und $|y| \lessgtr |\varphi(x)|$ wird eine endliche Zahl von Gitterpunkten abgegrenzt. Die Abzählung der Theilerpunkte unter ihnen auf den x-Coordinatenstrahlen liefert die Anzahl τ_φ, die Abzählung der auf dem mit y bezeichneten Coordinatenstrahl liegenden Theilerpunkte liefert als die Anzahl der Theiler, die gleich y sind, die Anzahl der Zahlen x, die durch y theilbar sind und die Bedingung

$$|x| \leqq |\Phi(y)|$$

erfüllen. Dass diese auf y liegenden Gitterpunkte $x|y$ wirklich alle zu der durch die Bedingungen abgegrenzten endlichen Zahl gehören, folgt daraus, dass nach Voraussetzung die Beziehung

$$|y| \gtrless |\varphi(x)|$$

zu

$$|x| \gtrless |\Phi(y)|$$

führt. Die Anzahl der durch y theilbaren Zahlen x, für die $|x| \gtrless |\Phi(y)|$ ist, ist aber gleich $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$. Dass bei der Abzählung auf den y-Coordinatenstrahlen ein Theiler y von x, dessen absoluter Betrag $> |\varphi(x)|$ ist, nicht mitgezählt wird, folgt daraus, dass die Beziehung

$$|y| > |\varphi(x)|$$

die andere

$$|\Phi(y)| < |x|$$

nach sich zieht, ein Theilerpunkt, der auf diesem x-Coordinatenstrahl liegt, befindet sich also nicht mit unter den Theilerpunkten, deren Anzahl soeben gleich $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ gefunden wurde.

Die Summation kann über alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen y erstreckt werden, weil für jedes $|y|$, das grösser ist als das grösste in Betracht kommende $|\varphi(x)|$, der Ausdruck $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ verschwindet.

Aus der Voraussetzung, dass $|\varphi(x)| < 1$ sein sollte für $|x| > |n|$ folgt, dass auch für kleine Werthe von $|y|$ die rechte Seite der Gleichung (1.) die angegebene Form behält. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist,

und wenn dann etwa $|\varphi(n)| = |N|$ wäre, so müsste für $|y| \gtreqless |N|$ der Ausdruck $\left[\frac{n}{y}\right]$ an die Stelle von $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ treten.

Ist z. B. $\varphi(x) = n$, *so erhält man die Gleichung*

$$T = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

wo T die Anzahl aller Theiler der Zahlen ist, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als n sind. Diese Formel stimmt ihrer Form und ihrem Inhalt nach mit der bekannten auf reelle Zahlen bezüglichen Gleichung überein, mit der *Dirichlet* sich so viel beschäftigt hat. Da man für $[\gamma]$ angenähert $\pi|\gamma|^2$ setzen darf, so kann man die *Dirichlet*schen Untersuchungen über den asymptotischen Werth der durchschnittlichen Theileranzahl*) auch auf complexe Zahlen übertragen, was ich jedoch hier nicht unternehmen will.

§ 12. Fortsetzung.

Nach der ausführlichen Herleitung der Formel (1.) des vorigen Paragraphen kann ich mich bei der folgenden Gleichung, die sich auf eine Function $f(x)$ von der Beschaffenheit der im § 10 betrachteten bezieht, kürzer fassen. Ueber $f(x)$ möge der Einfachheit wegen noch die Voraussetzung gemacht werden, dass $f(0) = 0$ ist. *Bezeichnet man, wenn x eine von Null verschiedene ganze Zahl ist, die einen absoluten Betrag* $\gtreqless |n|$ *hat, die Anzahl aller der Theiler y von x, die der Bedingung*

$$|y| < |f(x)|$$

genügen, mit τ'_f, *so ist*

$$(1.) \qquad \tau'_f + \sum_y \left[\frac{F(y)}{y}\right] = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right].$$

Die Summationen beziehen sich beide auf alle von Null verschiedenen Werthe von y, deren absoluter Betrag $\lesseqgtr |f(n)|$ *ist.*

Das Glied τ'_f ergiebt sich durch Abzählung der auf den x-Coordinaten liegenden Theilerpunkte, für die der absolute Betrag ihrer y-Coordinate kleiner ist als der absolute Betrag der y-Coordinate des Schnittpunktes der Curve $y = f(x)$ mit dem betreffenden x-Coordinatenstrahl. Die erste über y erstreckte Summe liefert durch Abzählung auf den y-Coordinaten die Theilerpunkte, die den Bedingungen

$$|f(x)| \lesseqgtr |y| \lesseqgtr |f(n)|$$

*) *Dirichlet*: Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie (Ges. Werke Band II, S. 49). Vergl. auch *Bachmanns* Analytische Zahlentheorie, S. 400ff.

genügen, denn aus

$$|f(x)| \gtrless |y|$$

folgt

$$|x| \gtrless |F(y)|,$$

und die Anzahl der durch y theilbaren Zahlen x, die diese Bedingung erfüllen, ist $\left[\frac{F(y)}{y}\right]$. Die rechte Seite endlich wird durch Abzählung auf den y-Coordinaten gefunden als die Anzahl aller Theiler y der Zahlen x, für die

$$y \gtrless |f(n)|$$

ist; sie umfasst also die beiden Anzahlen der linken Seite.

Lautet die den Theilern auferlegte Bedingung

$$|y| \gtrless |f(x)|,$$

so tritt an Stelle der Gleichung (1.) die Gleichung

$$(1'.) \qquad \tau_f + \sum_y \left[\frac{F(y)}{y}\right]' = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

wo die Summation über dieselben Werthe zu erstrecken ist wie in (1.).

Setzt man z. B., wobei alle Voraussetzungen über $f(x)$ erfüllt sind,

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{also} \quad \frac{F(y)}{y} = y,$$

so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(2.) \qquad \tau'_f + \sum_y [y] = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

$$(2'.) \qquad \tau_f + \sum_y [y]' = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

wo y beidemal alle $[\sqrt{n}]$ von Null verschiedenen Zahlen durchläuft, deren absoluter Betrag $\gtrless |\sqrt{n}|$ ist.

Nun ist $\tau'_f + \tau_f = T$, d. h. gleich der Anzahl *aller* Theiler der Zahlen (excl. Null), deren absoluter Betrag $\gtrless |n|$ ist, da jedem Theiler von x, der seinem Betrage nach $< |\sqrt{x}|$ ist, ein solcher entspricht, dessen absoluter Betrag $> |\sqrt{x}|$ ist, sodass man, um die Anzahl beider Arten von Theilern zu erhalten, die ersteren zweimal zählen kann. In der Anzahl τ_f sind aber auch die Theiler mitgezählt, deren absoluter Betrag $= |\sqrt{x}|$ ist. Ferner ist nach der Formel (1.) des § 10, die auf die Function $y = x$ anwendbar ist,

$$\sum_y [y] + \sum_y [y]' = [\sqrt{n}]^2.$$

Die Bereiche, die in der angegebenen Formel mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet waren, brauchen hier in der Klammer nicht hinzugefügt zu werden, weil jedes y, das bei der Bestimmung von $[y]$ und $[y]'$ gezählt wird, in dem Bereiche der von Null verschiedenen Zahlen, deren absoluter Betrag $< |\sqrt{n}|$

ist, enthalten ist. Dieser Bereich tritt aber im vorliegenden Falle an die Stelle sowohl von $\mathfrak{b}$ als von $\mathfrak{B}$.

Durch die Addition der Gleichungen (2.) und (2'.) erhält man also folgenden Satz: ***Die Anzahl der Theiler aller Zahlen, deren absoluter Betrag den von n nicht übersteigt, ist***

$$T = 2\sum_{y}\left[\frac{n}{y}\right] - [\sqrt{n}]^2, \tag{3.}$$

wo y alle von Null verschiedenen Zahlen durchläuft, deren absoluter Betrag $\leqq |\sqrt{n}|$ ***ist.***

Der entsprechende Satz für reelle Zahlen ist zuerst von *Dirichlet* a. a. O. aufgestellt worden, allerdings in einer etwas abweichenden Form. Auch die Herren *Hermite* und *Cesàro* haben Beweise für den auf reelle Zahlen bezüglichen Satz gegeben.*)

Um den Satz durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, bemerke ich, dass man sich bei der wirklichen Abzählung sowohl der Theiler als auch der Ausdrücke $[\gamma]$ auf Zahlen mit positivem reellen und nicht negativem imaginären Bestandtheil beschränken darf. Diese Zahlen mögen kurz als positive Zahlen bezeichnet werden. Die Zahl T ist dann einfach das 16-fache der so gefundenen Zahl T_+, ebenso ist die durch diese abgekürzte Zählung erhaltene Summe $\sum_{y}{}_{+}\left[\frac{n}{y}\right]_+$ der 16-te Theil der in (3.) vorkommenden Summe, wenn mit $[\gamma]_+$ die Anzahl der positiven Zahlen bezeichnet wird, deren absoluter Betrag $\leqq |\gamma|$ ist, denn es ist $[\gamma]_+ = \frac{1}{4}[\gamma]$ und von je 4 associirten Zahlen y, die denselben Werth von $\left[\frac{n}{y}\right]$ liefern, wird nur die positive berücksichtigt. Endlich ist auch $[\sqrt{n}]^2_+ = \frac{1}{16}[\sqrt{n}]^2$.

Ist nun z. B. $n = 5+3i$, so kommt bei der Bestimmung von T_+ der Theiler 1, da $[5+3i]_+ = 27$ ist, 27-mal vor. Ferner ist zu zählen: 14-mal der Theiler $1+i$, 6-mal 2, 5-mal $1+2i$, und $2+i$, 3-mal $2+2i$, 2-mal 3, $1+3i$, $3+i$, $3+2i$, $2+3i$, 4, $4+i$, $1+4i$ und $27-14 = 13$-mal kommt ein Theiler 1-mal vor, so dass $T_+ = 89$ ist.

Die Werthe, die y durchläuft, sind die $[\sqrt{5+3i}]_+ = 5$ Zahlen 1, $1+i$, 2, $2+i$, $1+2i$, und die zugehörigen Werthe von $\left[\frac{5+3i}{y}\right]_+$ sind 27, 14, 6, 5, 5. Die doppelte Summe dieser Anzahlen ist 114, und wenn man hiervon $[\sqrt{5+3i}]^2_+ = 25$ subtrahirt, erhält man ebenfalls 89.

*) Vergl. *Bachmann* a. a. O. S. 407 ff.

Ueber die *Jacobi*sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Breslau.)

Herr *O. Hermes* hat im 73. Bande dieses Journals, S. 179, durch die Veröffentlichung von Bruchstücken aus den hinterlassenen Papieren *Jacobis**) uns mit dessen interessanter Erzeugung der Flächen zweiten Grades bekannt gemacht, welche folgendermassen lautet:

Wenn zweimal drei Punkte A, B, C; A′, B′, C′ gegeben sind und zu jedem Punkte P′ einer Ebene die beiden Punkte P construirt werden, für welche

$$AP = A'P', \quad BP = B'P', \quad CP = C'P',$$

so ist deren Ort eine Fläche zweiten Grades.

Herr *Hermes* hat eine ausführliche eigene Untersuchung über diese Erzeugung in dem nämlichen Bande des Journals S. 209 veröffentlicht, welche sich an *Jacobi*sche Gedankengänge anschliesst. Im Uebrigen scheint dieselbe keine weiteren Arbeiten veranlasst zu haben. Nur *Schröter* kommt in seinem Buche über die Flächen zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung im § 67 auf sie zu sprechen. Er bringt sie mit der *Mac-Cullagh*schen Erzeugungsweise in Verbindung, aber betrachtet nur den speciellen Fall, dass der Punkt P' die Ebene $A'B'C'$, nicht eine beliebige Ebene durchläuft.

Vielleicht rege ich zu weiteren Arbeiten über diesen Gegenstand an, wenn ich kurz erörtere, warum diese nicht so einfache Erzeugung, welche zunächst zu höheren Verwandschaften führt, doch ein Erzeugniss von so niedriger Ordnung liefert, und dazu einen anderen Ausgangspunkt der Betrachtung nehme.

---

*) *Jacobi*s Gesammelte Werke, Bd. 7, S. 42; vergl. auch eine vorläufige Mittheilung in einem Briefe *Jacobi*s an *Steiner*, dieses Journal, Bd. 12, S. 137 (Gesammelte Werke, Bd. 7, S. 7) No. 5.

Werden in einer Ebene um zwei Punkte A, B Kreise geschlagen, für deren Radien r, r_1 gilt:

$$r^2 = a + 2bl + cl^2, \qquad r_1^2 = a_1 + 2b_1 l + cl^2,$$

wo l ein veränderlicher Parameter ist und l^2 beidemal ***denselben*** Coefficienten hat, so schneiden sich diese Kreise in Punktepaaren, welche einen Kegelschnitt erzeugen.

Sind A', B' zwei andere Punkte und bewegt sich P' im Raume auf einer Geraden g', so haben $A'P'^2$, $B'P'^2$ die eben genannte Eigenschaft von r^2, r_1^2; werden daher um A, B die Kugeln mit den Radien $A'P'$, $B'P'$ geschlagen, so erzeugen die Schnittkreise, wenn P' die g' durchläuft, eine Rotationsfläche zweiten Grades.

Wenn C und C' hinzugefügt werden, so ergiebt sich bei $A, C;\ A', C'$ und der nämlichen Geraden g' eine zweite Rotationsfläche zweiten Grades. Die zu demselben Punkte P' von g' gehörigen Parallelkreise der einen und der anderen liegen in entsprechenden Ebenen zweier perspectiven Parallelebenen-Büschel; die Ebene, welche deren Erzeugniss ist, schneidet beide Flächen in einem gemeinsamen Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte-Paare der Kugeln um A, B, C mit den Radien $A'P'$, $B'P'$, $C'P'$ entsteht, wenn P' die Gerade g' durchläuft. Der andere den beiden Flächen gemeinsame Kegelschnitt ergiebt sich durch die Schnitte solcher je auf derselben Kugel um A befindlichen Parallelkreise der beiden Flächen, welche von ***verschiedenen*** Schnitten der ebenso grossen Kugel von A' mit g' herrühren.

Auf diese Weise entsteht eine zweizweideutige Verwandtschaft zwischen den Punkten P, P' der beiden Räume Σ, Σ' derartig, dass

$$AP = A'P', \qquad BP = B'P', \qquad CP = C'P';$$

durchläuft P' oder P eine Gerade, so beschreibt P oder P' einen Kegelschnitt. Daraus folgt: ***Durchläuft P' oder P eine Ebene, so beschreibt P oder P' eine Fläche zweiten Grades.***

On the reduction of *Kronecker*'s modular systems whose elements are functions of two und three variables.

(By Mr. *Harris Hancock* at Cincinnati, Ohio.)

Following the methods given in the lectures at Berlin by Professor *Kronecker*, I have considered in the Quarterly Journal of Mathematics (No. 106, 1894) modular systems of the form

$$[f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_r(x)],$$

where the functions $f(x)$ are integral in x with integral coefficients. We suppose that there is no divisor common to all these functions, since it could at once be taken out as a factor of the system.

It was shown that such a system was equivalent to a system of the form

$$[m,\ m_1 f_1^{(1)}(x),\ m_2 f_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ m_n f_n^{(1)}(x),\ g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots],$$

where $m_1, m_2, \ldots, m_n$ are integers and divisors of the integer m, and $f_1^{(1)}(x), f_2^{(1)}(x), \ldots, f_n^{(1)}(x), g_1(x), g_2(x), \ldots$ are integral functions of the variable with integral coefficients.

When the integer m is equal to, say, $p \cdot q^2 \cdot r^3 \cdot \ldots$, where $p, q, r, \ldots$ are prime integers, the modular system was shown to be equivalent to a product of modular systems of the form:

$$[p, F],\ [q^2, qF_1, G],\ [r^3, r^2F_2, rG_1, H],\ \ldots$$

where $F, F_1, F_2, \ldots, G, G_1, \ldots, H, \ldots$ are determinate integral functions of the variable x with integral coefficients.

In *Crelle*'s Journal, Bd. 119, p. 148 canonical forms were derived for such systems. This treatment is (theoretically) sufficient for modular systems whose elements are integral functions of any number of variables:

$$f_1(x, x_1, x_2, \ldots, x_k),\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots, x_k),\ \ldots$$

whose coefficients are integers. For make the ***Kronecker*** substitution

$$x_1 = x^g,\ x_2 = x^{g^2},\ \ldots,\ x_k = x^{g^k},$$

where g is a positive integer and is taken larger than the exponent of the highest power of any variable that appears in the expansion of any of the functions.

The functions $f(x, x_1, \ldots, x_k)$ are thereby transformed into functions $F(x)$ and in such a way that to any term of $f(x, x_1, \ldots, x_k)$ there is a corresponding term in $F(x)$, and to every term in $F(x)$ there corresponds a term in $f(x, x_1, \ldots, x_k)$.

We may in this manner apply the results known for functions of one variable to functions of several variables, and are thus able to derive reduced as well as canonical forms for modular systems in whose elements more than one variable enter.

But for the application of these systems to practical problems, to those arising for example in the Geometry of Two or Three Dimensions, to problems of Mechanics, etc., it seems desirable to have practical methods for their formulation; and consequently I have endeavoured to reduce by direct methods these systems to their simplest forms.

The results of these investigations I present in the following paper.

Modular systems in which the elements are functions involving only two variables.

Consider first modular systems of the form

$$[m_1, m_2, \ldots, g_1(x), g_2(x), \ldots, f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots]$$

where $m_1, m_2, \ldots$ are integers, $g_1(x), g_2(x), \ldots$ are integral functions in x with integral coefficients, $f_1(x, y), f_2(x, y)$ are integral functions in x, y with integral coefficients.

For brevity we denote a number of elements $m_1, m_2, \ldots$ by the symbol $N\{m\}$; and if the number is definite, $\overset{i=n}{\underset{i=1}{N}}\{m_i\}$ denotes the elements $m_1, m_2, \ldots, m_n$, while $pN\{g(x)\}$ is the symbol for $pg_1(x), pg_2(x), \ldots$.

We may then denote the above system by

$$[N\{m\},\ N\{g(x)\},\ N\{f(x, y)\}].$$

Since we may replace $N\{m\}$ by m, where m is the greatest common divisor of the integers $m_1, m_2, \ldots$, the system reduces at once to

$$[m, N\{g(x)\}, N\{f(x, y)\}].$$

If $m = m_1 \cdot m_2$ where the integers m_1 and m_2 are relatively prime to each other, this system is equal to the product of the two systems

$$[m_1, N\{g(x)\}, N\{f(x,y)\}], \quad [m_2, N\{g(x)\}, N\{f(x,y)\}].$$

We have therefore to consider (cf. this Journal, Bd. 119, p. 153) modular systems of the form

$$\left[\begin{matrix} p^n, p^{n-1}N\{g^{(1)}(x)\}, p^{n-2}N\{g^{(2)}(x)\}, \ldots, pN\{g^{(n-1)}(x)\}, \\ N\{g^n(x)\}, p^{n-1}N\{f^{(1)}(x,y)\}, p^{n-2}N\{f^{(2)}(x,y)\}, \ldots, N\{f^{(n)}(x,y)\} \end{matrix}\right],$$

where p is a prime integer and where the indices belonging to the functions are merely used to avoid a great number of different letters and all the functions are integral in their variables with integral coefficients. For brevity we may say that such functions belong to the realm of integrity $[1, x, y]$, where by this realm of integrity we understand that system of integral quantities that is composed of all integral functions of the elements $1, x, y$ including, of course all integers.

When $n = 1$, the above system reduces to a system of the form

$$[p, N\{g(x)\}, N\{f(x,y)\}]$$

and by the methods given in this Journal, Bd. 119, p. 153 and p. 154, this system becomes at once

$$[p, g(x), N\{f(x,y)\}],$$

where $g(x)$ belongs to the realm of integrity $[1, x]$ and is the greatest common divisor (mod. p) of the functions $g_1(x), g_2(x), \ldots$.

If this function $g(x)$ should be an integer, there are two cases that may arise:

1^0. This integer may be $\equiv 0 \pmod{p}$, and then the system reduces to

$$[p, N\{f(x,y)\}]$$

and may be treated after methods given later, p. 292; or 2^0, this integer $\not\equiv 0 \pmod{p}$, when the system reduces to a unit-system and ceases to be of interest.

It may happen that an element $f_1(x,y)$, say, contains a factor $h_1(x)$, so that $f_1(x,y) = h_1(x) f_1'(x,y) \pmod{p}$. Then if $h_1(x)$ is not a divisor of $g(x)$, the element $h_1(x) f_1'(x,y)$ may without altering the equivalence of the system be replaced by an element $d_1(x) f_1'(x,y)$ where $d_1(x)$ is a divisor (mod. p) of $g(x)$.

For suppose that $d_1(x)$ is the greatest common divisor (mod. p) of $g(x)$ and $h_1(x)$, then we may always determine two functions $\bar{g}(x)$ and $\bar{h}_1(x)$ belonging to the realm $[1, x]$ such that $g(x)\bar{g}(x)+h_1(x)\bar{h}_1(x)\equiv d_1(x)$ (mod. p), from which it follows that we may add the element

$$d_1(x)f_1'(x, y)\equiv g(x)\bar{g}(x)f_1'(x,y)+h_1(x)\bar{h}_1(x)f_1'(x,y) \text{ (mod. } p)$$

to the system without altering its equivalence.

After this element has been added to the system, the element $h_1(x)f_1'(x,y)$ being a multiple of $d_1(x)f_1'(x,y)$ may be dropped from the system.

We next determine whether the function $g(x)$ is decomposable into factors (mod. p). We say that an integral function in x with integral coefficients is divisible by $g_1(x)$, or is equal to the product of two functions $g_1(x)$ and $g_2(x)$ (mod. p), where $g_1(x)$ and $g_2(x)$ are integral functions in x with integral coefficients, when

$$g(x) = g_1(x)g_2(x)+pk(x),$$

where $k(x)$ is an integral function in x with integral coefficients, or

$$g(x) \equiv g_1(x)g_2(x) \text{ (mod. } p).$$

If then $g(x) \equiv g_1(x)g_2(x)$ (mod. p), and if the functions $g_1(x)$ and $g_2(x)$ have no common divisor (mod. p), then we may always determine two functions belonging to the realm $[1,x]$, $a(x)$ and $b(x)$ such that

$$g_1(x)a(x)+g_2(x)b(x) \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$

It follows at once that

$$[p, g(x)] \sim [p, g_1(x)]\,[p, g_2(x)];$$

for this product is equal to $[p^2, pg_1(x), pg_2(x), g_1(x).\, g_2(x)]$. The elements $p^2, pg_1(x), pg_2(x)$ form a modular system $[p^2, pg_1(x), pg_2(x)] \sim p[p, g_1(x), g_2(x)]$

$$\sim p[p, g_1(x), g_2(x), g_1(x)a(x)+g_2(x)b(x)] \sim p[1] \sim p,$$

and $$[p, g_1(x), g_2(x)] \sim [p, g(x)].$$

For the sake of greater clearness in that which follows, I shall indicate briefly here what employing methods used by Professor ***Kronecker*** in his lectures, I have given in the Quarterly Journal of Mathematics (No. 106, p. 106 and arts. 28, 34, 36 and note to art. 42).

Consider the modular system

$$[p, f(x)]$$

where p is a prime integer and $f(x)$ a function of the realm $[1, x]$. For example take the system

$$[5, 2x^2+3x+4].$$

Multiplying the function $2x^2+3x+4$ by the numbers 1, 2, 3, 4, that is, by the complete system of incongruent residues (mod. 5), we have the functions:

$$2x^2+3x+4,\ 4x^2+6x+8,\ 6x^2+9x+12,\ 8x^2+12x+16.$$

These functions when reduced with respect to the modulus 5 are

$$2x^2+3x+4,\ 4x^2+x+3,\ x^2+4x+2,\ 3x^2+2x+1.$$

Hence the modular system $[5, 2x^2+3x+4]$ is equivalent to the system

$$[5, 2x^2+3x+4,\ 4x^2+x+3,\ x^2+4x+2,\ 3x^2+2x+1]$$
$$\sim [5, 4x^2+x+3] \sim [5, x^2+4x+2] \sim [5, 3x^2+2x+1].$$

For the function x^2+4x+2, for example, when multiplied respectively by the numbers 2, 3, 4 becomes (mod. 5)

$$2x^2+3x+4,\ 3x^2+2x+1,\ 4x^2+x+3,$$

which expressions may consequently be added to the system $[5, x^2+4x+2]$ without altering its equivalence.

In general, the system $[p, f(x)]$ is equivalent to the system $[p, rf(x)]$ where the integer r is any one of the complete system of incongruent residues (mod. p).

Hence in the above product, $[p, g_1(x)]\,[p, g_2(x)]$, the coefficients of the highest power of x in both $g_1(x)$ and $g_2(x)$ may be made *unity*, while all the other coefficient may be considered reduced, mod. p.

For example the product

$$[7, 2x+3]\,[7, 3x-2] \sim [7, 6x^2+5x-6] \sim [7, x^2+2x+6].$$

On the other hand

$$[7, 2x+3] \sim [7, x+5],$$
$$[7, 3x-2] \sim [7, x+4];$$

and

$$[7, x+5]\,[7, x+4] \sim [7, x^2+9x+20].$$

From this it is seen that in the decomposition of a quadratic function x^2+ax+b into its linear factors (mod. p), where p is a prime integer, if such a decomposition is possible, the integer a cannot be greater than $2p$

and b, cannot be greater than p^2. Hence if we have to find the divisors of $1x^2+Ax+B \pmod{p}$, where the integers A and B have been reduced, mod. p, we have to investigate whether each of the functions

$$x^2+(A+ip)x+(B+jp) \qquad \binom{i=0,\ 1,}{j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1}$$

is decomposable into linear factors, giving in all $2p$ different functions to consider.

The same method is at once applicable to the decomposition of a function of any degree into its irreducible factors (mod. p).

We have then to consider modular systems of the form

$$\left[\begin{array}{c} p, g(x)^m, g(x)^{m-1}N\{f^{(1)}(x,y)\},\ g(x)^{m-2}N\{f^{(2)}(x,y)\}, \ldots \\ g(x)N\{f^{(m-1)}(x,y)\},\ N\{f^{(m)}(x,y)\} \end{array}\right],$$

where p is a prime integer, $g(x)$ is an irreducible function in x with integral coefficients, and where all other elements are quantities of the realm $[1, x, y]$.

When $m = 1$, we have a modular system of the form

$$[p, g(x),\ N\{f(x,y)\}].$$

The function $g(x)$ has the form

$$g(x) = 1.x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n,$$

where the integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ have been reduced (mod. p). Hence each of these integers may have the values

$$0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

There are consequently p^n such functions of the form $g(x)$ including that function. The p^n-1 functions other than $g(x)$ may be called the complete system of incongruent residues (modd. $p, g(x)$). They have the characteristics: 1^0, the difference of no two of them is $\equiv 0$ (modd. $p, g(x)$) and 2^0, any other function of the realm $[1, x]$ is congruent to one of the representatives of this system (modd. $p, g(x)$).

Suppose that the function $f_1(x,y)$ when expanded in descending powers of y has the form

$$f_1(x,y) = a_0(x)y^m+a_1(x)y^{m-1}+\cdots+a_m(x),$$

where the functions $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_m(x)$ are quantities of the realm $[1, x]$.

Further suppose that the expansion of $a_0(x)$ is

$$a_0(x) = a_{00}x^s + a_{01}x^{s-1} + \cdots + a_{0s}$$

where $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0s}$ are integers.

Since $g(x)$ is an irreducible function (mod. p), and as we may suppose that the coefficients of the powers of y in the above expression have been reduced (modd. $p, g(x)$), it is seen that we may determine two functions belonging to the realm $[1, x]$, $\bar{a}_0(x)$ and $\bar{g}(x)$ such that

$$a_0(x)\bar{a}_0(x) + g(x)\bar{g}(x) = c$$

where c is an integer which is not congruent to zero (mod. p). We may therefore find two integers $\bar{p}$ and $\bar{c}$ satisfying the expression

$$c\bar{c} + p\bar{p} = 1.$$

Hence $\bar{c}a_0(x)\bar{a}_0(x) \equiv 1$ (modd. $p, g(x)$). Further since $\bar{c}a_0(x)$ is one of the representatives of the complete system of incongruent residues (modd. $p, g(x)$), it follows that in our given system we may without altering its equivalence replace the element $f_1(x, y)$ by the element $ca_0(x)f_1(x, y) = \varphi_1(x, y)$, say, where $\varphi_1(x, y)$ has the form

$$\varphi_1(x, y) = 1 . y^m + c_1(x)y^{m-1} + c_2(x)y^{m-2} + \cdots + c_m(x),$$

where $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_m(x)$ are quantities of the realm $[1, x]$. These functions may be considered reduced (modd. $p, g(x)$) and the element $\varphi_1(x, y)$ may be called the ***reduced element*** of $f_1(x, y)$.

We may notice here for the sake of what comes later that the number of different forms that each of the above functions $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_m(x)$ can have, is p^n, where n is the degree of the irreducible function $g(x)$.

Hence if $\varphi_1(x, y)$ is an irreducible function in x, y, the number of functions of the form $\varphi_1(x, y)$ is $[p^n]^m = p^{nm}$. We may say here that the $p^{nm} - 1$ functions that are different from $\varphi_1(x, y)$ form a complete system of incongruent residues (modd. $p, g(x), \varphi_1(x, y)$). They have the characteristics 1^0, the difference of no two of them is congruent to zero (modd. $p, g(x), \varphi_1(x, y)$) and 2^0, any function belonging to the realm of integrity $[1, x, y]$ is congruent to one of the representatives of this system (modd. $p, g(x), \varphi_1(x, y)$).

We take instead of the proposed system the system

$$[p, g(x), N\{\varphi(x, y)\}],$$

where the elements $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, ..., are the reduced elements of $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ..., and we suppose that the elements $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, ... are arranged in the modular system so that those having the highest powers of y come first.

Let

$$\varphi_1(x, y) = 1y^m + c_1(x)y^{m-1} + c_2(x)y^{m-2} + \cdots + c_m(x),$$
$$\varphi_2(x, y) = 1y^k + d_1(x)y^{k-1} + d_2(x)y^{k-2} + \cdots + d_k(x),$$

and suppose that $m \geqq k$.

Divide $\varphi_1(x, y)$ by $\varphi_2(x, y)$ and express the result of the division in the form

$$\varphi_1(x, y) = q_1(x, y)\varphi_2(x, y) + r_1(x, y),$$

where $q_1(x,y)$ and $r_1(x,y)$ are quantities of the realm $[1, x, y]$. From this it is seen that $r_1(x,y)$ may be added to our system without altering its equivalence. Its degree in y is less than the degree of $\varphi_2(x,y)$ in y.

Since $\varphi_1(x,y)$ is a linear function of $\varphi_2(x,y)$ and $r_1(x,y)$, it may be omitted from the system. Let $\Phi_3(x,y)$ be the reduced element of $r_1(x,y)$ (modd. $p, g(x)$). Divide $\varphi_2(x,y)$ by $\Phi_3(x,y)$ and omitting the arguments after the functional signs when no ambiguity can arise, we have

$$\varphi_2 = q_2\Phi_3 + r_2.$$

Let Φ_4 be the reduced element of r_2, which we suppose has been added to the system, drop φ_2 from the system and continuing the process we have

$$\Phi_3 = q_3\Phi_4 + r_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Since the degrees of the functions $r_3, r_4, \ldots$ in y are continually decreasing without becoming negative, we must finally have

$$\Phi_{\nu-2} = q_{\nu-2}\Phi_{\nu-1} + r_{\nu-2},$$
$$\Phi_{\nu-1} = q_{\nu-1}\Phi_{\nu},$$

where Φ_ν is the reduced element (modd. $p, g(x)$) of $r_{\nu-2}$. From this it is seen that we have been able to replace the two elements $\varphi_1(x, y)$ and $\varphi_2(x, y)$ in the modular system by their greatest common divisor (modd. $p, g(x)$), the element $\Phi_\nu(x,y)$. If this function $\Phi_\nu(x,y)$ should turn out to be congruent to zero (modd. $p, g(x)$), it is seen that the two original elements $\varphi_1(x, y)$ and $\varphi_2(x, y)$ add nothing new to the system; while if

$\Phi_\nu(x,y) \equiv k(x)$ (modd. $p, g(x)$), we are able to determine a function $\bar{k}(x)$ belonging to the realm $[1, x]$ so that

$$k(x)\bar{k}(x) \equiv 1 (\text{modd. } p, g(x)),$$

and the system reduces to a unit-system.

If we continue the above process, it is seen that the original modular system

$$[p, g(x),\ N\{f(x,y)\}]$$

may be replaced by the equivalent modular system

$$[p, g(x),\ f(x,y)]$$

where $f(x,y)$ is the greatest common divisor (modd. $p, g(x)$) of the elements $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, ...

We may suppose here that the coefficient of the highest power of y of the function $f(x,y)$, when expanded in descending powers of this variable, is unity, while the others have all been reduced (modd. $p, g(x)$).

The form of modular system $[p, g(x), f(x,y)]$ is what I have called a canonical form of the original system (see this Journal, Bd. 118, p. 157), as it may be shown here precisely as it was shown for modular systems involving only one variable, that in whatever manner the reduction of the original modular system may have been performed, the final form which is equivalent to the above form, is identical to it.

Suppose that $f(x,y)$ in the above system is equal to the product of the two functions $F_1(x,y)$ and $F_2(x,y)$ (modd. $p, g(x)$), and further suppose that with respect to these moduli the functions $F_1(x,y)$ and $F_2(x,y)$ have no divisor in common.

We are therefore able to find belonging to the realm $[1, x, y]$ two functions $a(x,y)$ and $b(x,y)$ such that

$$a(x,y)F_1(x,y) + b(x,y)F_2(x,y) = d(x),$$

where $d(x)$ belongs to the realm $[1, x]$.

The function $d(x)$ has no factor in common with $g(x)$, for $g(x)$ being irreducible, it would follow in that case that $d(x)$ was divisible by $g(x)$, and then

$$a(x,y)F_1(x,y) + b(x,y)F_2(x,y) \equiv 0 (\text{modd. } p, g(x)).$$

But in the derivation of $a(x,y)$ and $b(x,y)$ we had

$$F_1 = Q_1 F_2 + F_3,$$
$$F_2 = Q_2 F_3 + F_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{\lambda-2} = Q_{\lambda-2} F_{\lambda-1} + F_\lambda,$$
$$F_{\lambda-1} = Q_{\lambda-1} F_\lambda + d(x).$$

If then $d(x) \equiv 0$ (modd. $p, g(x)$), it follows that $F_{\lambda-1}$ is divisible by F_λ with respect to these moduli, and consequently F_1 and F_2; but as we have supposed that these functions did not have a common divisor with respect to these moduli, it follows also that $g(x)$ and $d(x)$ have no divisor in common.

We may therefore determine belonging to the realm $[1,x]$ two functions $\bar{d}(x)$ and $\bar{g}(x)$ so that

$$d(x)\bar{d}(x) + g(x)\bar{g}(x) = c,$$

where c is an integer $\not\equiv 0$ (mod. p); and finally we can find two integers $\bar{c}$ and $\bar{p}$ which satisfy the expression

$$c\bar{c} + p\bar{p} = 1.$$

It follows then at once that the modular system

$$[p, g(x), f(x,y)]$$

is equivalent to the product of the two systems

$$[p, g(x), F_1(x,y)] \quad \text{and} \quad [p, g(x), F_2(x,y)].$$

Hence when we come to the consideration of modular systems which have as elements functions of three variables, a prime integer and an irreducible function of one of the variables, the element involving only two variables may be regarded as an irreducible function or the power of an irreducible function in these two variables.

When the function $g(x)$ irreducible with respect to the modulus p, occurs to the second degree in the modular system, it has the form

(a.) $$[p, g(x)^2, g(x)N|f(x,y)|, N|h(x,y)|].$$

This system is equivalent to the system

$$[p, pg(x), g(x)^2, g(x)N|f(x,y)|, g(x)N|h(x,y)|, N|h(x,y)|].$$

From the elements $pg(x), g(x)^2, g(x)N|h(x,y)|$ we form the system

$$[pg(x), g(x)^2, g(x)N|h(x,y)|] \sim g(x)[p, g(x), N|h(x,y)|].$$

We have seen above that

(b.) $$[p, g(x), N\{h(x,y)\}] \sim [p, g(x), \bar{h}(x,y)],$$

where $\bar{h}(x,y)$ is the greatest common divisor (modd. p, $g(x)$) of the elements $h_1(x,y)$, $h_2(x,y)$, ...

From the auxiliary system (b.) it follows on the one hand that

$$\bar{h}(x,y) = pP + g(x)G + \sum_i h_i(x,y)H_i,$$

where P, G, H_i are quantities belonging to the realm $[1, x, y]$; consequently if we write

$$h(x,y) = \bar{h}(x,y) - g(x)G = pP + \sum_i h_i(x,y)H_i,$$

we may add the element $h(x,y)$ to the system (a.) without altering its equivalence.

On the other hand we have from (b.)

$$h_\nu(x,y) = p\pi_\nu + g(x)\gamma'_\nu + \bar{h}(x,y)\alpha_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

All new quantities introduced belong to the realm $[1,x,y]$, *unless they are otherwise specified.*

But since $\bar{h}(x,y) = h(x,y) + g(x)G$, it follows that

$$h_\nu(x,y) = p\pi_\nu + g(x)\gamma_\nu + h(x,y)\alpha_\nu,$$

where

$$\gamma_\nu = \gamma'_\nu + G\alpha_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

It is therefore evident that if we add the element $h(x,y)$ to the system (a.) we may instead of the elements $N\{h(x,y)\}$, which appear in this realm, write the elements $g(x)N\{\gamma(x,y)\}$, without altering the equivalence of (a.).

That system becomes then

(a'.) $$[p, g(x)^2, g(x)N\{f(x,y)\}, g(x)N\{\gamma(x,y)\}, h(x,y)\}.$$

Again from the elements $pg(x)$, $g(x)^2$, $g(x)N\{f(x,y)\}$, $g(x)N\{\gamma(x,y)\}$ which are quantities of the system (a'.), we may form the system

$$g(x)[p, g(x), N\{f(x,y)\}, N\{\gamma(x,y)\}] \sim g(x)[p, g(x), f(x,y)],$$

where $f(x,y)$ is the greatest common divisor (modd. p, $g(x)$) of the elements $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, ..., $\gamma_1(x,y)$, $\gamma_2(x,y)$, ... Hence the system (a'.) becomes

$$[p, g(x)^2, g(x)f(x,y), h(x,y)],$$

which system is equivalent to

$$[p, pg(x), \quad g(x)^2, \quad g(x)f(x,y), \quad g(x)h(x,y), \quad h(x,y)].$$

Further since

(c.) $$g(x)[p, g(x), f(x,y), h(x,y)] \sim g(x)[p, g(x), \theta(x,y)],$$

it follows on the one hand that

$$h(x,y) = pA + g(x)\Phi + \theta(x,y)\Theta$$

and on the other hand that

$$\theta(x,y) = pa+g(x)b+f(x,y)c+h(x,y)d.$$

Consequently

$$g(x)\theta(x,y) = pg(x)a+g(x)^2b+g(x)f(x,y)c+h(x,y)g(x)d,$$

so that the element $g(x)\theta(x,y)$ may be added to the given system, and when this has been done, it follows from (c.) that $g(x)f(x,y)$ may be omitted form this system, which has now the form

$$[p,\ g(x)^2,\ g(x)\theta(x,y),\ g(x)\Phi(x,y)+\theta(x,y)\Theta(x,y)].$$

We note 1^0, that $\theta(x,y)$ being the greatest common divisor (modd. $p, g(x)$) of the functions $f(x,y)$ and $h(x,y)$ its degree in either x or y cannot be greater than the degrees of either of those functions in the respective variables; when expanded in descending powers of y the coefficient of the highest power of $\theta(x,y)$ in y is unity, the others have been reduced (modd. $p, g(x)$); 2^0, owing to the presence of the element $g(x)\theta(x,y)$ in the system we may consider that the coefficients of $\Theta(x,y)$, when expanded in descending powers of y, have been reduced so that the coefficient of its highest power in y is unity, while the others are reduced (modd. $p, g(x)$); 3^0, the function $\Phi(x,y)$ is of less degree in y than the degree in that variable of the function $\theta(x,y)$ and all its coefficients have been reduced (modd. $p, g(x)$). The system in this form is a canonical form of the modular system considered (cf. this Journal, Bd. 119, p. 159).

When $g(x)$ occurs to the third power, the modular system is of the form

$$(\alpha.)\qquad [p,\ g(x)^3,\ g(x)^2N\{f(x,y)\},\ g(x)N\{h(x,y)\},\ N\{k(x,y)\}].$$

We construct the auxiliary modular system

$$(\beta.)\ [p,\ g(x)^2,\ g(x)N\{h(x,y)\},\ N\{k(x,y)\}] \sim [p,\ g(x)^2,\ g(x)\bar{h}(x,y),\ \bar{k}(x,y)];$$

from which it follows at once on the one hand that

$$\bar{k}(x,y) = pM+g(x)^2N+g(x)\sum_i h_i(x,y)Q_i+\sum_j k_j(x,y)R_j.$$

If then we write

$$k(x,y) = \bar{k}(x,y)-g(x)^2N,$$

it is clear that we may add this element to the system $(\alpha.)$ without altering its equivalence.

On the other hand we have from $(\beta.)$

$$k_\nu(x,y) = pa_\nu+g(x)^2b'_\nu+g(x)\bar{h}(x,y)c_\nu+\bar{k}(x,y)d_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

or

$$k_\nu(x,y) = pa_\nu + g(x)^2 b_\nu + g(x)\bar{h}(x,y)c_\nu + k(x,y)d_\nu,$$

where

$$b_\nu = b'_\nu + Nd_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Hence if we add $k(x,y)$ to the system $(\alpha.)$, we may write in that system instead of the elements $N\{k(x,y)\}$ the elements

$$g(x)^2 b_\nu + g(x)\bar{h}(x,y)c_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

We denote these elements by

$$\underset{\nu}{N}\{g(x)^2 b_\nu(x,y) + g(x)\bar{h}(x,y)c_\nu(x,y)\}.$$

The system $(\alpha.)$ becomes then

$$\begin{bmatrix} p,\ g(x)^3,\ g(x)^2 N\{f(x,y)\},\ g(x)N\{h(x,y)\}, \\ g(x)\underset{\nu}{N}\{g(x)b_\nu(x,y) + \bar{h}(x,y)c_\nu(x,y)\},\ k(x,y) \end{bmatrix},$$

which system, owing to the equivalence

$$\begin{bmatrix} p,\ g(x)^2,\ g(x)N\{f(x,y)\},\ N\{h(x,y)\} \\ \underset{\nu}{N}\{g(x)b_\nu(x,y) + h(x,y)c_\nu(x,y)\} \end{bmatrix}$$
$$\sim [p,\ g(x)^2,\ g(x)f(x,y),\ h(x,y)],$$

becomes

$$[p,\ g(x)^3,\ g(x)^2 f(x,y),\ g(x)h(x,y),\ k(x,y)].$$

It is easy to put this system in a canonical form similar to the one given in this Journal, loc. cit. p. 160.

The reduction of modular systems in which the irreducible (mod. p) function $g(x)$ occurs to the fourth or higher powers offers no difficulty.

Modular systems in which the prime integer p occurs to powers higher than the first.

Consider first the modular system

$$[p^2,\ pf(x),\ g(x)],$$

where $f(x)$ and $g(x)$ are quantities of the realm $[1,x]$, and p a prime integer.

Suppose next that $g(x)$ was reducible with respect to the moduli p^2, $pf(x)$, so that

$$g(x) = g_1(x)\,g_2(x) + pf(x)\,\psi(x) + p^2\chi(x),$$

the functions $\psi(x)$ and $\chi(x)$ being of the realm $[1,x]$. Further suppose that the functions $g_1(x)$ and $g_2(x)$ have no common factor with respect to the moduli p^2 and $pf(x)$. It follows at once that

$$[p^2, pf(x), g_1(x)]\,[p^2, pf(x), g_2(x)] \sim [p^2, pf(x)\,g_1(x), pf(x)\,g_2(x), g(x) - pf(x)\,\psi(x)].$$

If it further happened that $g_1(x)$ and $g_2(x)$ have no common factor (mod. p), then

$$[p^2, pf(x)g_1(x), pf(x)g_2(x), g(x)-pf(x)\psi(x)] \sim [p^2, pf(x), g(x)].$$

Returning again to the system $[p^2, pf(x), g(x)]$ suppose first that $g(x)$ is irreducible (mod. p); then

$$[p^2, pf(x), g(x)] \sim [p^2, pf(x), pg(x), g(x)] \sim [p\{p, f(x), g(x)\}, g(x)] \sim [p, g(x)],$$

unless $f(x)$ is a multiple of $g(x)$ and in that case

$$[p^2, pf(x), g(x)] \sim [p^2, g(x)].$$

As we are now considering only modular systems in which the prime integer occurs to a power higher than the first, we need consider only the latter case.

Next let $g(x)$ be an irreducible function (mod. p) in the system $[p^2, pf(x), g(x)^2]$; it follows then that

$$[p\{p, f(x), g(x)^2\}, g(x)^2] \sim [p, g(x)^2]$$

unless $f(x)$ is a multiple of $g(x)$.

If this multiple >1, then

$$[p^2, pf(x), g(x)^2] \sim [p^2, g(x)^2];$$

and if this multiple $= 1$,

$$[p^2, pf(x), g(x)^2] \sim [p^2, pg(x), g(x)^2].$$

Further suppose that $g(x) \equiv g_1(x)g_2(x)$ (mod. p), and make the additional hypothesis that $g_1(x)$ and $g_2(x)$ are irreducible with repect to this modulus. Then as seen above

$$[p^2, pf(x), g(x)] \sim [p, g(x)],$$

if $f(x)$ is not divisible by either $g_1(x)$ or $g_2(x)$ (mod. p); but

$$[p^2, pf(x), g(x)] \sim [p^2, pg_1(x), g(x)],$$

when $f(x)$ is divisible by $g_1(x)$ but not by $g_2(x)$.

After making these preliminary remarks, consider the system

$$[p^2, g(x), pN\{f(x,y)\}, N\{h(x,y)\}],$$

and suppose first that $g(x)$ is irreducible (mod. p).

From the auxiliary system

$$[p, g(x), N\{h(x,y)\}] \sim [p, g(x), \bar{h}(x,y)]$$

we have on the one hand

$$\bar{h}(x,y) = pP + g(x)G + \sum_i h_i(x,y)H_i,$$

so that we may add the $h(x,y) = \bar{h}(x,y) - pP$ to the given modular system without altering its equivalence.

On the other hand we have

$$h_\nu(x,y) = p\pi'_\nu + g(x)\gamma_\nu + \bar{h}(x,y)\delta_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$

or

$$h_\nu(x,y) = p\pi_\nu + g(x)\gamma_\nu + h(x,y)\delta_\nu,$$

where

$$\pi_\nu = \pi'_\nu + P\delta_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Hence after we have added $h(x,y)$ to our modular system, we may write instead of the elements $N\{h(x,y)\}$ the elements $pN\{\pi(x,y)\}$, the system thus becoming

$$[p^2,\ g(x),\ pN\{f(x,y)\},\ pN\{\pi(x,y)\},\ h(x,y)].$$

In virtue of the equivalence

$$[p,\ g(x),\ N\{f(x,y)\},\ N\{\pi(x,y)\}] \sim [p,\ g(x),\ f(x,y)],$$

the above system becomes:

$$[p^2,\ g(x),\ pf(x,y),\ h(x,y)].$$

It follows further from the auxiliary system

$$[p,\ g(x),\ f(x,y),\ h(x,y)] \sim [p,\ g(x),\ \theta(x,y)],$$

that we may add the element $p\,\theta(x,y)$ to the given system; and, when this has been done, that we may drop from that system the element $p\,f(x,y)$. Owing to the auxiliary system we also have

$$h(x,y) = p\varphi(x,y) + g(x)\ G(x,y) + \theta(x,y)\ \Theta(x,y).$$

The reduced modular system consequently takes the form

$$[p^2, g(x),\ p\theta(x,y),\ p\varphi(x,y) + \theta(x,y)\ \Theta(x,y)].$$

When expanded in descending powers of y, the coefficients of the highest powers of y in both $\theta(x,y)$ and $\Theta(xy)$ are unity, while the other coefficients may be considered reduced (modd. $p, g(x)$). The degree of $\varphi(x,y)$ in y is less than that of $\theta(x,y)$ in y and all the coefficients may be considered reduced (modd. $p, g(x)$). The system is a canonical form of the modular system considered.

Systems in which the element $g(x)$ is reducible (mod. p).

Consider the system

(I.) $$[p^2,\ g(x),\ pN\{f(x,y)\},\ N\{h(x,y)\}],$$

and suppose that $g(x) \equiv g_1(x)g_2(x)$ (mod. p) but that $g_1(x)$ and $g_2(x)$ are irreducible (mod. p).

Form the auxiliary modular system

$$\begin{aligned}(\text{II.})\quad & [p, g(x), N\{h(x,y)\}] \sim [p, g_1(x), N\{h(x,y)\}]\,[p, g_2(x), N\{h(x,y)\}] \\ & \sim [p, g_1(x), H_1(x,y)]\,[p, g_2(x), H_2(x,y)] \\ & \sim [p, g(x), g_1(x)H_2(x,y), g_2(x)H_1(x,y), H_1(x,y)H_2(x,y)].\end{aligned}$$

From this equivalence we have on the one hand, if we use the functional sign for the function itself:

$$h_\nu(x,y) = p\pi_\nu + g\gamma_\nu + g_1H_2\delta_\nu + g_2H_1\beta_\nu + H_1H_2\alpha_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

and on the other hand:

$$\begin{aligned}g_1(x)H_2(x,y) &= pA_1 + gB_1 + \sum_i h_i(x,y)C_i^{(1)}, \\ g_2(x)H_1(x,y) &= pA_2 + gB_2 + \sum_i h_i(x,y)C_i^{(2)}, \\ H_1(x,y)H_2(x,y) &= pA_3 + gB_3 + \sum_i h_i(x,y)C_i^{(3)}.\end{aligned}$$

We note that the product of the first two of these equations is identically equal to the last one multiplied by $g(x)$.

It is seen from this that we may add the elements

$$\begin{aligned}S_1 &= g_1(x)H_2(x,y) - pA_1(x,y), \\ S_2 &= g_1(x)H_1(x,y) - pA_2(x,y), \\ S_3 &= H_1(x,y).H_2(x,y) - pA_3(x,y),\end{aligned}$$

to the modular system (I.) without altering its equivalence.

We have further

$$h_\nu(x,y) = p[\pi_\nu + A_1\delta_\nu + A_2\beta_\nu + A_3\alpha_\nu] + g\gamma_\nu + S_1\delta_\nu + S_2\beta_\nu + S_3\alpha_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Hence after we have added the elements S_1, S_2, S_3 to the system (I.) we may write in that system instead of the elements $h_\nu(x,y)$, the elements $pK_\nu(x,y)$, where we have written $K_\nu(x,y)$ for the expression

$$\pi_\nu + A_1\delta_\nu + A_2\beta_\nu + A_3\alpha_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

The system becomes then

$$(\text{I}'.)\qquad [p^2, g(x), pN\{f(x,y)\}, pN\{K(x,y)\}, S_1, S_2, S_3].$$

From the auxiliary modular system

$$\begin{aligned}& [p, g(x), N\{f(x,y)\}, N\{K(x,y)\}] \\ & \quad \sim [p, g_1(x), N\{f(x,y)\}, N\{K(x,y)\}]\,[p, g_2(x), N\{f(x,y)\}, N\{K(x,y)\}] \\ & \quad \sim [p, g_1(x), F_1(x,y)]\,[p, g_2(x), F_2(x,y)] \\ & \quad \sim [p, g(x), g_1(x)F_2(x,y), g_2(x)F_1(x,y), F_1(x,y)F_2(x,y)],\end{aligned}$$

it is seen that the system (I'.) may be written in the form

$$(\mathrm{I}''.)\quad \left[\begin{array}{l|ll} p^2,\ g(x),\ p & g_1(x)\,F_2(x,y), & g_1(x)\,H_2(x,y)-pA_1(x,y), \\ & g_2(x)\,F_1(x,y), & g_2(x)\,H_1(x,y)-pA_2(x,y), \\ & F_1(x,y)\,F_2(x,y), & H_1(x,y)\,H_2(x,y)-pA_3(x,y) \end{array}\right].$$

To this system we may add the element $g_2(x)\{g_1(x)H_2(x,y)-pA_1(x,y)\}$, and consequently, owing to the presence of $g(x)$ in the system, the element $pg_2(x)A_1(x,y)$; in the same way we may add

$$pg_2(x)H_1(x,y),\ pg_1(x)A_2(x,y),\ pg_1(x)H_2(x,y),\ pH_1(x,y)H_2(x,y).$$

Form the equivalences:

1) $[p, g, F_1F_2, H_1H_2] \sim [p, g, g_1M_2, g_2M_1, M_1M_2]$,
2) $[p, g_2, F_2, A_2, H_2, M_2] \sim [p, g_2, L_2]$,
3) $[p, g_1, F_1, A_1, H_1, M_1] \sim [p, g_1, L_1]$.

In the formation of the equivalence 2) we observe that we have the elements p^2g_1, since p^2 is an element, pg or $pg_1.g_2$, pg_1F_2, pg_1A_2, pg_1H_2 and pg_1M_2, the last element coming from $p\,[p, g, F_1.F_2, H_1.H_2]$, which is to be added to the system (I''.).

We have from 2)

$$g_1H_2 = g_1\,[p\alpha+g_2\beta+L_2\gamma],$$

and from 3)

$$pA_1 = p\,[p\delta+g_1\zeta+L_1\eta];$$

and consequently

$$g_1H_2-pA_1 \equiv g_1L_2a_1+pg_1a_2+pL_1a_3 \ (\text{modd. } p^2,\ g(x)),$$

where I have written $a_1=\gamma$, $\alpha-\zeta=a_2$ and $a_3=-\eta$.

Similarly we have

$$g_2H_1-pA_2 \equiv g_2L_1b_1+pg_2b_2+pL_2b_3 \ (\text{modd. } p^2,\ g(x)),$$

$$H_1H_2-pA_3 \equiv M_1M_2c_1+g_1L_2c_2+g_2L\ c_3+pc_4+pg_1c_5+pg_2c_6 \ (\text{modd. } p^2,\ g(x)).$$

Hence the final form for the system (I.) is

$$\left[\begin{array}{l|ll} p^2,\ g,\ p & g_1\ L_2\ , & g_1L_2a_1+pg_1a_2+pL_1a_3\ , \\ & g_2\ L_1\ , & g_2L_1b_1+pg_2b_2+pL_2b_3\ , \\ & M_1M_2\ , & M_1M_2c_1+g_1L_2c_2+g_2L_1c_3+pc_4+pg_1c_5+pg_2c_6 \end{array}\right].$$

As a corollary consider the system

$$[p^2,\ pg_1(x),\ g(x),\ pN\{f(x,y)\},\ N\{h(x,y)\}]$$

where $g \equiv g_1.g_2 \pmod p$, and where $g_1(x)$ and $g_2(x)$ are irreducible (mod. p).

This system reduces at once as in the case of the preceding system to the form

$$[p^2, pg_1, g, pN\{f(x,y)\}, pN\{k(x,y)\}, g_1H_2-pA_1, g_2H_1-pA_2, H_1H_2-pA_3],$$

a system which, owing to the equivalence

$$[p^2, pg_1, pN\{f(x,y)\}, pN\{k(x,y)\}] \sim p[p, g_1, F_1],$$

becomes:

$$[p^2, pg_1, g, pF_1, g_1H_2-pA_1, g_2H_1-pA_2, H_1H_2-pA_3].$$

We may add pg_2A_1 to this system, and owing to the presence of pg_1 within this system, also the element pg_1A_1.

Since the system

$$[p^2, pg_2A_1, pg_1A_1] \sim p[p, g_2A_1, g_1A_1] \sim p[p, A_1],$$

it is seen that we may add pA_1 to the system. We may add pg_2H_1 and consequently pH_1 to the system, which becomes

$$[p^2, pg_1 \cdot g, pF_1, pA_1, pH_1, g_1H_2, g_2H_1-pA_2, H_1H_2-pA_3];$$

owing to the equivalence

$$[p, g_1, F_1, A_1, H_1] \sim [p, g_1, L_1],$$

we have

$$H_1 = pa_1+g_1a_2+L_1a_3,$$

and consequently the modular system has the form

$$\left[\begin{array}{l} p^2, pg_1(x), g(x), pL_1(x,y), g_1(x)H_2(x,y), \\ \qquad g_2(x)L_1(x,y)a_3(x,y)+pg_2(x)a_1(x,y) \quad -pA_2(x,y) \\ \qquad L_1(x,y)H_2(x,y)a_3(x,y)+pH_2(x,y)a_1(x,y)-pA_3(x,y) \end{array}\right].$$

Suppose next that $g(x) \equiv g_1(x)g_2(x)g_3(x)$ ***(mod. p) and that the functions*** $g_1(x)$, $g_2(x)$ ***and*** $g_3(x)$ ***are irreducible (mod. p).***

Let the modular system under consideration be

(a.) $$[p^2, g(x), pN\{f(x,y)\}, N\{h(x,y)\}].$$

Form the modular system

$$[p, g(x), N\{h(x,y)\}] \sim [p, g_1, N\{h(x,y)\}]\,[p, g_2, N\{h(x,y)\}]\,[p, g_3, N\{h(x,y)\}]$$
$$\sim [p, g_1, H_1(x,y)]\,[p, g_2, H_2(x,y)]\,[p, g_3, H_3(x,y)]$$
$$\sim [p, g, g_1g_2H_3, g_1g_3H_2, g_2g_3H_1, g_1H_2H_3, g_2H_1H_3, g_3H_1H_2, H_1H_2H_3],$$

from which we have on the one hand

$$\begin{aligned}
g_1\, g_2 H_3 &= pA_1+gB_1+\Sigma h_i C_i^{(1)},\\
g_1\, g_3 H_2 &= pA_2+gB_2+\Sigma h_i C_i^{(2)},\\
g_2\, g_3 H_1 &= pA_3+gB_3+\Sigma h_i C_i^{(3)},\\
g_1 H_2 H_3 &= pA_4+gB_4+\Sigma h_i C_i^{(4)},\\
g_2 H_1 H_3 &= pA_5+gB_5+\Sigma h_i C_i^{(5)},\\
g_3 H_1 H_2 &= pA_6+gB_6+\Sigma h_i C_i^{(6)},\\
H_1 H_2 H_3 &= pA_7+gB_7+\Sigma h_i C_i^{(7)}.
\end{aligned}$$

We may therefore add the quantities

$$\begin{aligned}
g_1\, g_2 H_3 - pA_1 &= R_1,\\
g_1\, g_3 H_2 - pA_2 &= R_2,\\
g_2\, g_3 H_1 - pA_3 &= R_3,\\
g_1 H_2 H_3 - pA_4 &= R_4,\\
g_2 H_1 H_3 - pA_5 &= R_5,\\
g_3 H_1 H_2 - pA_6 &= R_6,\\
H_1 H_2 H_3 - pA_7 &= R_7,
\end{aligned}$$

to the given system without altering its equivalence.

It also follows on the other hand that

$$\begin{aligned}
h_\nu(x,y) = {} & pa'_\nu+gb_\nu+g_1g_2H_3c_\nu^{(1)}+g_1g_3H_2c_\nu^{(2)}+g_2g_3H_1c_\nu^{(3)}\\
& +g_1H_2H_3c_\nu^{(4)}+g_2H_1H_3c_\nu^{(5)}+g_3H_1H_2c_\nu^{(6)}+H_1H_2H_3c_\nu^{(7)} \qquad (\nu=1,2,\ldots)
\end{aligned}$$

or

$$h_\nu(x,y) = pa_\nu+gb_\nu+\sum_{i=1}^{i=7} R_i c_\nu^{(i)},$$

where

$$a_\nu = a'_\nu+\sum_{i=1}^{i=7} A_i c_\nu^{(i)} \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Hence after we have added the seven elements $\overset{i=7}{N}\{R_i\}$ to the modulas system we may add instead of the elements $N\{h(x,y)\}$ the elementr $pN\{a(x,y)\}$, the system thus becoming

$$\Big[p^2,\ g(x),\ pN\{f(x,y)\},\ pN\{a(x,y)\},\ \overset{i=7}{N}\{R_i\}\Big].$$

Owing to the equivalence

$$[p,\ g,\ N\{f(x,y),\ N\{a(x,y)\}] \sim$$

$$[p,\ g_1,\ N\{f(x,y)\},\ N\{a(x,y)\}]\ [p,\ g_2,\ N\{f(x,y)\},\ N\{a(x,y)\}]$$

$$[p,\ g_3,\ N\{f(x,y)\},\ N\{a(x,y)\}] \sim [p,\ g_1,\ K_1(x,y)]\ [p,\ g_2,\ K_2(x,y)]\ [p,\ g_3K_3(x,y)]$$

$$\sim [p,\ g,\ g_1g_2K_3,\ g_1g_3K_2,\ g_2g_3K_1,\ g_1K_2K_3,\ g_2K_1K_3,\ g_3K_1K_2,\ K_1K_2K_3],$$

the system may be written

$$\left[\begin{array}{l|ll} p^2,\ g(x),\ p & g_1\,g_2K_3\,, & g_1\,g_2H_3-pA_1, \\ & g_1\,g_3K_2\,, & g_1\,g_3H_2-pA_2, \\ & g_2\,g_3K_1\,, & g_2\,g_3H_1-pA_3, \\ & g_1K_2K_3\,, & g_1H_2H_3-pA_4, \\ & g_2K_1K_3\,, & g_2H_1H_3-pA_5, \\ & g_3K_1K_2\,, & g_3H_1H_2-pA_6, \\ & K_1K_2K_3\,, & H_1H_2H_3-pA_7 \end{array}\right].$$

Since we may add $p(g_1g_2H_3-pA_1)$, it is seen that we may add to the system:

$$\begin{array}{l} pg_1g_2H_3,\ pg_1g_3H_2,\ pg_2g_3H_1, \\ pg_1g_2A_6,\ pg_1g_3A_5,\ pg_2g_3A_4, \\ pg_1H_2H_3,\ pg_2H_1H_3,\ pg_3H_1H_2, \\ pg_1Ag_3,\ p_2A_2,\ pg_3A_1,\ pH_1H_2H_3. \end{array}$$

We have therefore to form the systems

$$[p^2,\ pg,\ pK_1K_2K_3,\ pH_1H_2H_3] \backsim p\,[p,\ g,\ K_1K_2K_3,\ H_1H_2H_3]$$
$$\backsim p\,[p,\ g_1,\ S_1]\,[p,\ g_2,\ S_2]\,[p,\ g_3,\ S_3],$$

or

1) $[p,\ g,\ K_1K_2K_3,\ H_1H_2H_3]$
$$\backsim [p,\ g,\ g_1g_2S_3,\ g_1g_3S_2,\ g_2g_3S_1,\ g_1S_2S_3,\ g_2S_1S_3,\ g_3S_1S_2,\ S_1S_2S_3],$$
2) $[p,\ g_2g_3,\ K_2K_3,\ H_2H_3,\ S_2S_3,\ A_3] \backsim [p,\ g_2g_3,\ g_2M_3,\ g_3M_2,\ M_2M_3]$,
3) $[p,\ g_1g_2,\ K_1K_2,\ H_1H_2,\ S_1S_2,\ A_1] \backsim [p,\ g_1g_2,\ g_1Q_2,\ g_2Q_1,\ Q_1Q_2]$,
4) $[p,\ g_1g_3,\ K_1K_3,\ H_1H_3,\ S_1S_3,\ A_2] \backsim [p,\ g_1g_3,\ g_1N_3,\ g_3N_1,\ N_1N_3]$,
5) $[p,\ g_3,\ K_3,\ H_3,\ S_3,\ M_3,\ N_3,\ A_6] \backsim [p,\ g_3,\ L_3]$,
6) $[p,\ g_2,\ K_2,\ H_2,\ S_2,\ M_2,\ Q_2,\ A_5] \backsim [p,\ g_2,\ L_2]$,
7) $[p,\ g_1,\ K_1,\ H_1,\ S_1,\ N_1,\ Q_1,\ A_4] \backsim [p,\ g_1,\ L_1]$.

We may therefore write our system in the form

$$\left[\begin{array}{l|ll} p^2,\ g(x),\ p & g_1\,g_2\,L_3\,, & g_1\,g_2H_3-p\,A_1\,, \\ & g_1\,g_3\,L_2\,, & g_1\,g_3H_2-p\,A_2\,, \\ & g_2\,g_3\,L_1\,, & g_2\,g_3H_1-p\,A_3\,, \\ & g_1M_2M_3\,, & g_1H_2H_3-p\,A_4\,, \\ & g_2N_1N_3\,, & g_2H_1H_3-p\,A_5\,. \\ & g_3Q_1Q_2\,, & g_3H_1H_2-p\,A_6\,, \\ & S_1\,S_2\,S_3\,, & H_1H_2H_3-p\,A_7\,. \end{array}\right]$$

where, if we make use of the formulae 4), 5), 6) and 7), $g_1g_2H_3-pA_1$ has the form:

$$g_1g_2H_3-pA_1 \equiv g_1g_2L_3a_1+pg_1L_2a_2+pg_2L_1a_3+pg_1g_2a_4+pQ_1Q_2a_5 \text{ (modd. } p^2,\ g(x)),$$

and similarly:

$$g_1g_3H_2-pA_2 \equiv g_1g_3L_2b_1+pg_1L_3b_2+pg_3L_1b_3+pg_1g_3b_4+pN_1N_3b_5 \text{ (modd. } p^2,\ g(x)),$$
$$g_2g_3H_1-pA_3 \equiv g_2g_3L_1c_1+pg_2L_3c_2+pg_3L_2c_3+pg_2g_3c_4+pM_2M_3c_5 \text{ (modd. } p^2,\ g(x)),$$
$$g_1H_2H_3-pA_4 \equiv g_1g_2L_3d_1+g_1g_3L_2d_2+g_1M_2M_3d_3+pg_1g_2d_4 + pg_1g_3d_5+pg_1d_6+pL_1d_7 \text{ (modd. } p^2,\ g(x)),$$
$$g_2H_1H_3-pA_5 \equiv g_1g_2L_3e_1+g_2g_3L_1e_2+g_2N_1N_3e_3+pg_1g_2e_4 + pg_2g_3e_5+pg_2e_6+pL_2e_7 \text{ (modd. } p^2,\ g(x)),$$
$$g_3H_1H_2-pA_6 \equiv g_1g_3L_2m_1+g_2g_3L_1m_2+g_3Q_1Q_2m_3+pg_1g_3L_2m_4 + pg_2g_3m_5+pg_3m_6+pL_3m_7 \text{ (modd. } p^2,\ g(x)),$$
$$H_1H_2H_3-pA_7 \equiv S_1S_2S_3n_1+g_1g_2L_3n_2+g_1g_3L_2n_3+g_2g_3L_1n_4+g_1M_2M_3n_5 + g_2N_1N_3n_6+g_3Q_1Q_2n_7+pg_1g_2n_8+pg_1g_3n_9+pg_2g_3n_{10}+pg_1n_{11} + pg_2n_{12}+pg_3n_{13}+pn_{14} \text{ (modd. } p^2,\ g(x)).$$

Reduction of the modular system

$$[p^2,\ g(x)^2,\ pN\{f(x,y)\},\ g(x)N\{h(x,y)\},\ pg(x)N\{k(x,y)\},\ N\{m(x,y)\}],$$

where $g(x)$ ***is an irreducible function*** (mod. p).

We form the auxiliary modular system

$$p[p,\ g(x)^2,\ g(x)N\{h(x,y)\},\ N\{m(x,y)\}] \sim p[p,\ g(x)^2,\ g(x)H(x,y),\ M(x,y)];$$

from which we have on the one hand:

$$m_\nu(x,y) = pa'_\nu+g^2b_\nu+gHc_\nu+Md_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots),$$
$$g(x)h_\mu(x,y) = pe'_\mu+g^2r_\mu+gHs_\mu+Mt_\mu \qquad (\mu=1,2,\ldots),$$

and on the other hand:

$$M(x,y) = pA+g^2B+g\sum_i h_ib_i+\sum_i m_iE_i,$$
$$g(x)H(x,y) = pA_1+g^2N+g\sum_i h_iP_i+\sum_i m_iR_i.$$

We may therefore add

$$M(x,y)-pA = S,$$
$$g(x)H(x,y)-pA_1 = S_1,$$

to the given modular system.

Further since

$$m_\nu(x,y) = pa_\nu+g^2b_\nu+S_1c_\nu+Sd_\nu,$$

where

$$a_\nu = a'_\nu + A_1 c_\nu + A d_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

and

$$g(x)h_\mu(x,y) = pe_\mu + g^2 r_\mu + S_1 s_\mu + S t_\mu,$$

where

$$e_\mu = e'_\mu + A_1 s_\mu + A t_\mu \qquad (\mu=1,2,\ldots),$$

we may instead of the elements $N\{m(x,y)\}$ and $g(x)N\{h(x,y)\}$ write the elements $pN\{a(x,y)\}$ and $pN\{e(x,y)\}$ in our modular system, which becomes

$$[p^2, g^2, pN\{f(x,y)\}, pgN\{k(x,y)\}, pN\{a(x,y)\}, pN\{e(x,y)\}, S_1, S].$$

Further since

$$[p, g^2, N\{(f(x,y)\}, gN\{k(x,y)\}, N\{a(x,y)\}, N\{e(x,y)\}] \sim [p, g^2, gL, V],$$

the system may be written

$$[p^2, g^2, pgL, pV, S_1, S].$$

Since $S = M - pA$, $S_1 = gH - pA_1$, we may add the elements pM, pgA_1, pgH to the system.

Write

$$1) \qquad [p, g^2, V, M] \sim [p, g^2, gW, Z],$$

and

$$2) \qquad [p, g, L, W, A_1, H] \sim [p, g, Y].$$

The system is then

$$[p^2, g^2, pgY, pZ, gH - pA_1, M - pA]$$

where from 1) and 2) $gH - pA_1$ and $M - pA$ have the form

$$gH - pA_1 \equiv gYa_1 + pgb_1 + pYc_1 \text{ (modd. } p^2, g(x)^2),$$
$$M - pA \equiv Za + gb + pc \text{ (mod. } g(x)^2).$$

Reduction of modular systems in which the prime integer p occurs to the third power.

Consider first the system

$$[p^3, p^2 h(x), pk(x), g(x)],$$

and suppose that $g(x)$ is irreducible (mod. p).

The system

$$[p^3, p^2 k(x), p^2 g(x)] \sim p^2[p, k(x), g(x)] \sim p^2[1],$$

unless $k(x) = g(x)\bar{g}(x) + p\varphi(x)$, and consequently unless $pk(x) \equiv p^2\varphi(x)$ (mod. $g(x)$).

We have in this case

$$[p^3, p^2h(x), p^2\varphi(x), g(x)].$$

But the system

$$[p^3, p^2h(x), p^2\varphi(x), p^2g(x)]$$

is equivalent to

$$p^2[p, h(x), \varphi(x), g(x)] \sim p^2[1],$$

unless

$$h(x) = g(x)\gamma(x)+p\chi(x),$$

and

$$\varphi(x) = g(x)k(x)+p\psi(x).$$

Hence $p^2h(x)$ and $p^2\varphi(x)$ may be omitted from the system, which becomes then

$$[p^3, g(x)].$$

The system $[p^3, g(x), p^2N\{f(x,y)\}, pN\{h(x,y)\}, N\{k(x,y)\}]$ *reduces without any trouble to the form*

$$[p^3, g(x), p^2F(x,y), pH(x,y), K(x,y)].$$

The reduction of the system

$$[p^3, g(x), p^2N\{f(x,y)\}, pN\{h(x,y), N\{k(x,y)\}]$$

where $g(x) \equiv g_1(x).g_2(x)$ (mod.p) *and where* $g_1(x)$ *and* $g_2(x)$ *are irreducible* (mod. p).

From the auxiliary system

$$[p^2, g(x), pN\{h(x,y)\}, N\{k(x,y)]$$

$$\sim \left[\begin{array}{c|cc} p^2, g(x), p & g_1 L_2, & S_1 \\ & g_2 L_1, & S_2 \\ & M_1 M_2, & S_3 \end{array}\right],$$

we have on the one hand

$$k_\nu(x,y) = p^2a'_\nu+gb_\nu+pg_1L_2c_\nu+pg_2L_1d_\nu+pM_1M_2e_\nu+S_1\alpha_\nu+S_2\beta_\nu+S_3\gamma_\nu \quad (\nu=1,2,\ldots),$$

and on the other hand

$$S_1 = p^2A_1+gB_1+p\sum_i h_i(x,y)C_i^{(1)}+\sum_i k_i(x,y)D_i^{(1)},$$
$$S_2 = p^2A_2+gB_2+p\sum_i h_i(x,y)C_i^{(2)}+\sum_i k_i(x,y)D_i^{(2)},$$
$$S_3 = p^2A_3+gB_3+p\sum_i h_i(x,y)C_i^{(3)}+\sum_i k_i(x,y)D_i^{(3)}.$$

From this it is seen that the quantities

$$T_1 = S_1 - p^2 A_1 ,$$
$$T_2 = S_2 - p^2 A_2 ,$$
$$T_3 = S_3 - p^2 A_3$$

may be added to the given system.

It follows also that

$$k_\nu(x,y) = p^2 a_\nu + g b_\nu + p g_1 L_2 c_\nu + p g_2 L_1 d_\nu + p M_1 M_2 e_\nu + T_1 \alpha_\nu + T_2 \beta_\nu + T_3 \gamma_\nu ,$$

where

$$a_\nu = a'_\nu + A_1 \alpha_\nu + A_2 \beta_\nu + A_3 \gamma_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Hence instead of the elements $N\{k(x,y)\}$ we may add to the given modular system the elements

$$\underset{\nu}{N}\{p^2 a_\nu + p g_1 L_2 c_\nu + p g_2 L_1 d_\nu + p M_1 M_2 e_\nu\},$$

which becomes then

$$\left[p^3,\ g,\ p^2 N\{f(x,y)\},\ pN\{h(x,y)\},\ p\underset{\nu}{N}\{p a_\nu + g_1 L_2 c_\nu + g_2 L_1 d_\nu + M_1 M_2 e_\nu\}, T_1,\ T_2,\ T_3 \right],$$

a system, which owing to the equivalence

$$p[p^2,\ g,\ pN\{f(x,y)\},\ N\{h(x,y)\},\ \underset{\nu}{N}\{p a_\nu + g_1 L_2 c_\nu + g_2 L_1 d_\nu + M_1 M_2 e_\nu\}]$$

$$\sim p \left[\begin{array}{lll|ll} p^2, & g, & p & g_1 N_2 , & R_1 \\ & & & g_2 N_1 , & R_2 \\ & & & Q_1 Q_2 , & R_3 \end{array} \right],$$

way be written in the form

$$\left[\begin{array}{lll|ll|ll} p^3, & g, & p^2 & g_1 N_2 , & p & R_1 , & T_1 \\ & & & g_2 N_1 , & & R_2 , & T_2 \\ & & & Q_1 Q_2 , & & R_3 , & T_3 \end{array} \right].$$

In this system the functions $R_1, R_2, \ldots$ have the form

$$R_1 = g_1 M_2 - p C_1 , \qquad T_1 = g_1 P_2 - p B_1 - p^2 A_1 ,$$
$$R_2 = g_2 M_1 - p C_2 , \qquad T_2 = g_2 P_1 - p B_2 - p^2 A_2 ,$$
$$R_3 = M_1 M_2 - p C_3 , \qquad T_3 = P_1 P_2 - p B_3 - p^2 A_3 .$$

We may therefore add $p^2 R_1$ to the system, or the element $p^2 g_1 M_2$ and in the same way the elements $p^2 g_2 M_1$, $p^2 g_2 C_1$, $p^2 g_1 P_2$, $p^2 g_2 B_1$, etc. and continue the reduction as on p. 281.

As a corollary to the reduction of the above system consider the system

$$[p^3, p^2g_2, pg_1, g, p^2N\{f(x,y)\}, pN\{h(x,y)\}, N\{k(x,y)\}],$$

where $g \equiv g_1 . g_2 \pmod{p}$ and g_1 is irreducible (mod. p).

Since

$$[p^3, p^2g_1, p^2g_2] \sim p^2[p, g_1, g_2] \sim p^2[1],$$

unless

$$g_2 = g_1 . \bar{g}_1 + p\chi,$$

so that

$$p^2g_2 = p^2g_1 . \bar{g}_1 + p^3\chi,$$

it follows that p^2g_2 must be omitted from the system; otherwise it is not of the form considered.

The system may therefore, as above, be written in the form

$$[p^3, pg_1, g, p^2N\{f(x,y)\}, pN\{h(x), y\}$$
$$pN\{pa_\nu + g_1L_2c_\nu + g_2L_1d_\nu + M_1M_2e_\nu\}, T_1, T_2, T_3]$$
$$\sim [p^3, pg_1, g, p^2F, pH, T_1, T_2, T_3].$$

Here, as above, the elements T_1, T_2, T_3 have the form

$$T_1 = g_1P_2 - pB_1 - p^2A_1,$$
$$T_2 = g_2P_1 - pB_2 - p^2A_2,$$
$$T_3 = P_1P_2 - pB_3 - p^2A_3.$$

We may therefore add to the system the element p^2B_1. Hence if the system does not reduce to one in which the prime integer occurs only to the second power, B_1 must have the form $B_1 = g_1B_1' + p\varphi$, and hence in the modular system T_1 has the form $g_1P_2 - p^2A_1'$. It follows then that we may also add $p^2g_2A_1'$ to the system. If we suppose that g_2 is irreducible (mod. p), then A_1' must be divisible by $g_1(x)$ mod. p, and consequently the element T_1 takes the form g_1P_2 and the system reduces to

$$[p^3, pg_1, g, p^2F, pH, g_1P_2, g_2P_1 - pB_2 - p^2A_2, P_1P_2 - pB_3 - p^2A_3].$$

To this system we may also add p^2T_2 or $p^2g_2P_1$, and owing to the presence of pg_1 in the system also $p^2g_1P_1$. Owing to the equivalence $[p^3, p^2g_1P_1, p^2g_2P_1]$ $\sim p^2[p, g_1P_1, g_2P_1] \sim p^2[p, P_1]$, it follows that we may add p^2P_1 to the system and finally combine p^2F with p^2P_1 as we have repeatedly done.

The reduction of the modular system

$$[p^3,\ g,\ p^2N\{f(x,y)\},\ pN\{h(x,y)\},\ N\{k(x,y)\}],$$

where $g \equiv g_1 g_2 g_3 \pmod{p}$ *and* g_1, g_2, g_3 *are irreducible* (mod. p).

Applying the same principles as on p. 282 this system is seen to be equivalent to

$$\left[\begin{array}{l|l|l|l} p^3,\ g,\ p^2 & g_1\,g_2 W_3\,, & p & V_1\,, \quad U_1 \\ & g_1\,g_3 W_2\,, & & V_2\,, \quad U_2 \\ & g_2\,g_3 W_1\,, & & V_3\,, \quad U_3 \\ & g_1 T_2\ T_3\,, & & V_4\,, \quad U_4 \\ & g_2 X_1\ X_3\,, & & V_5\,, \quad U_5 \\ & g_3\,Y_1\ Y_2\,, & & V_6\,, \quad U_6 \\ & Z_1\,Z_2\,Z_3\,, & & V_7\,, \quad U_7 \end{array}\right],$$

Where the elements $V_1, V_2, \ldots, U_1, U_2, \ldots$ have the form

$$\begin{aligned} V_1 &= g_1\,g_2 M_3 - pC_1\,, & U_1 &= g_1\,g_2 H_3 - pB_1 - p^2 A_1\,, \\ V_2 &= g_1\,g_3 M_2 - pC_2\,, & U_2 &= g_1\,g_3 H_2 - pB_2 - p^2 A_2\,, \\ V_3 &= g_2\,g_3 M_1 - pC_3\,, & U_3 &= g_2\,g_3 H_1 - pB_3 - p^2 A_3\,, \\ V_4 &= g_1 M_2 M_3 - pC_4\,, & U_4 &= g_1 H_2 H_3 - pB_4 - p^2 A_4\,, \\ V_5 &= g_2 M_1 M_3 - pC_5\,, & U_5 &= g_2 H_1 H_3 - pB_5 - p^2 A_5\,, \\ V_6 &= g_3 M_1 M_2 - pC_6\,, & U_6 &= g_3 H_1 H_2 - pB_6 - p^2 A_6\,, \\ V_7 &= M_1 M_2 M_3 - pC_7\,, & U_7 &= H_1 H_2 H_3 - pB_7 - p^2 A_7. \end{aligned}$$

We may add to this system $p^2 V_1$ or $p^2 g_1 g_2 M_3$, $p g_3 U_1$ or $p^2 g_3 B_1$, etc. We may then continue the reduction as on p. 284.

The preceding reductions have all been made for systems having the form

$$[N\{m\},\ N\{g(x)\},\ N\{f(x,y)\}].$$

We have therefore assumed the presence of an integer and an integral function of one variable with integral coefficients within these systems.

If the system is given to us in the form

$$[N\{f(x,y)\}],$$

then, since the functions $f_1(x,y), f_2(x,y), \ldots$ have not all a common divisor (as such a divisor may be always taken out as a divisor of the system), it is in general possible to find functions $\bar{f}_1(x,y), \bar{f}_2(x,y), \ldots$ such that

$$f_1(x,y)\,\bar{f}_1(x,y) + f_2(x,y)\,\bar{f}_2(x,y) + \cdots = g(x),$$

where $g(x)$ belongs to the realm $[1, x]$.

When there is no solution common to any two of the equations $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$, ..., we may by the algorithm of the greatest common divisor determine functions $\bar{f}_1(x,y)$, $\bar{f}_2(x,y)$ which produce the identical relation

$$f_1(x,y)\,\bar{f}_1(x,y)+f_2(x,y)\,\bar{f}_2(x,y)+\cdots = m$$

where m is an integer.

Geometrically interpreted the curves $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$, ... have in this case no point of intersection or contact. They are, so to speak, isolated curves.

Neglecting for the time being this very special case, our hypotheses amount only to the supposition of the existence of an integer within the given system. In other words we suppose that we may produce integers by linear combinations of the elements of the system, the coefficients being quantities of the realm of integrity $[1, x, y]$. For example grant that we may effect the presence of two functions $g_1(x)$ and $g_2(x)$, such as $g(x)$ above, and that there is no value of x which causes both of these functions to vanish simultaneously; we may then by the algorithm of the greatest common divisor derive two functions $\bar{g}_1(x)$ and $\bar{g}_2(x)$ belonging to the realm $[1, x]$ such that

$$g_1(x)\,\bar{g}_1(x)+g_2(x)\,\bar{g}_2(x) = m,$$

where m is an integer.

Suppose, however, that we *have modular systems in which it is not possible to introduce integers as elements.*

As the simplest case consider a system of the form

$$[g(x), f_1(x,y), f_2(x,y)]$$

where $g(x)$ is a linear function of the elements $f_1(x,y)$ and $f_2(x,y)$ whose coefficients belong to the realm $[1, x, y]$.

As no integers appear as elements in the system, we shall do away with the restriction that only integers may enter the realm of rationality, and shall also allow rational numbers to enter this realm, although the functions that enter must be integral in x and y.

Suppose then that $f_1(x,y) = h_1(x)f_1^{(1)}(x,y)$, then if $h_1(x)$ is not a divisor of $g(x)$, the element $h_1(x)f_1^{(1)}(x,y)$ may be replaced by an element

$d_1(x)f_1^{(1)}(x,y)$, where $d_1(x)$ is a divisor of $g(x)$ and this may be done without altering the equivalence of the system.

For if we denote the greatest common divisor of $g(x)$ and $h_1(x)$ by $d_1(x)$ we may always determine belonging to our fixed realm of rationality two functions $\bar{g}(x)$ and $\bar{h}_1(x)$ so that

$$g(x)\bar{g}(x)+h_1(x)\bar{h}_1(x) = d_1(x),$$

where $d_1(x)$ likewise belongs to this realm.

From this it follows that we may add $d_1(x)f_1(x,y)$ to the given, and as $h_1(x)f_1(x,y)$ is a multiple of this element, drop it from the system.

If further $g(x) = g_1(x)\,g_2(x)$ and if $g_1(x)$ and $g_2(x)$ have no common divisor, we may by the algorithm of the greatest common divisor determine two functions $\bar{g}_1(x)$ and $\bar{g}_2(x)$ which belong to the fixed realm of rationality and which satisfy the identical relation

$$g_1(x)\,\bar{g}_1(x)+g_2(x)\,\bar{g}_2(x) = 1.$$

As a consequence of this the system $[g(x), f_1(x,y), f_2(x,y)]$ is equivalent to the product of the two systems

$$[g_1(x), f_1(x,y), f_2(x,y)] \text{ and } [g_2(x), f_1(x,y), f_2(x,y)].$$

We have then to consider the systems of the forms

$$[p(x)^n, p(x)^{n_1}f_1(x,y), p(x)^{n_2}f_2(x,y)],$$

where $p(x)$ is an irreducible integral function in x and the integers n_1 and n_2 are divisors of the integer n. The reduction of these systems may be performed in precisely the same manner as the systems which are treated in this Journal, Bd. 119, p. 153 *et seq.*, with the condition here that we admit into the realm of rationality integral functions in x and y with rational coefficients.

We have finally to consider systems of the form

$$[m, f_1(x,y), f_2(x,y)]$$

where the integer m is a linear function of the two elements $f_1(x,y)$ and $f_2(x,y)$ the coefficients being quantities of the realm of integrity $[1, x, y]$.

By processes already repeatedly employed the reduction of this system may be reduced to the reduction of systems of the form

$$[p^n, p^{n_1}f_1(x,y), p^{n_2}f_2(x,y)]$$

where p is a prime integer, and the integers n_1, n_2 divisors of the integer n. We may further assume that the coefficients of the highest power of both the elements $f_1(x,y)$ and $f_2(x,y)$ when expanded in descending powers of either x or y are either unity or powers of p, while the other coefficients have all been reduced with respect to a definite power of p as a modulus. But we are not able to carry the reduction further unless we admit into the realm of rationality rational functions of one of the variables, and then the reduction may be performed in the same way as the systems just mentioned above.

Modular Systems whose elements are functions of three variables.

Consider first the system

$$[p,\ g(x),\ f(x,y),\ N\{h(x,y,z)\}],$$

where p is a prime integer, $g(x)$ is an irreducible integral function in x (mod. p) with integral coefficients and $f(x,y)$ is an irreducible integral function in x,y (modd. p, $g(x)$) with integral coefficients. The functions $h_1(x,y,z)$, $h_2(x,y,z)$, ... belong to the realm of integrity $[1, x,y,z]$ and when expanded in descending powers of z have the form

$$h(x,y,z) = a_0(x,y)z^n + a_1(x,y)z^{n-1} + \cdots + a_n(x,y),$$

the functions $a_0(x,y)$, $a_1(x,y)$, ..., $a_n(x,y)$ belonging to the realm of integrity $[1, x,y]$.

We may find two integral functions with integral coefficients $\bar{a}_0(x,y)$ and $\bar{f}(x,y)$ such that

$$a_0(x,y)\,\bar{a}_0(x,y) + f(x,y)\,\bar{f}(x,y) = k(x),$$

where $k(x)$ is an integral function in x with integral coefficients and is not congruent to zero (modd. p, $g(x)$). Of course, those coefficients of $h(x,y,z)$ which contain $f(x,y)$ as a factor (modd. p, $g(x)$) are supposed to have been dropped from the discussion.

We may further determine two integral functions with integral coefficients $\bar{g}(x)$, $\bar{k}(x)$ so that

$$k(x)\bar{k}(x) + g(x)\bar{g}(x) = c,$$

where c is a constant and $\not\equiv 0$ (mod. p), and therefore finally we may determine two constants $\bar{p}$ and $\bar{c}$ which satisfy the expression

$$c\bar{c} + p\bar{p} = 1.$$

From this it follows, since the equivalence of the modular system is not altered (cf. p. 269) when we replace an element $h(x,y,z)$ by this element multiplied by any one of the system of incongruent residues (modd. p, $g(x)$, $f(x,y)$), that instead of the function $h(x,y,z)$ we may determine a function $H(x,y,z)$ in which the coefficient of the highest power of z is unity while the other coefficients have been reduced (modd. p, $g(x)$, $f(x,y)$). We call $H(x,y,z)$ the reduced element of $h(x,y,z)$.

Replacing then the elements $h(x,y,z)$ by their reduced elements $H(x,y,z)$, which we suppose have been arranged in the modular system according to their highest powers in z, the largest coming first, we derive by division the expression

$$H_1 = Q_1 H_2 + R_1,$$

where Q_1 and R_1 are quantities belonging to the realm $[1, x, y, z]$. We may consequently omit H_1 from the system, if to it we add the element R_1. Let H_3 be the reduced element of R_1.

Continuing the process we have

$$H_2 = Q_2 H_3 + R_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Proceding in this way, since the degrees of the functions in z that we adjoin to the system, are being continuously decreased without becoming negative, we must finally have

$$H_{\nu-2} = Q_{\nu-2} H_{\nu-1} + R_{\nu-2},$$
$$H_{\nu-1} = Q_{\nu-1} H_{\nu},$$

where H_ν is the reduced element of $R_{\nu-2}$.

If in this reduction it happened that $R_{\nu-2}$ was of the zero degree in z, and was not congruent to zero (modd. p, $g(x)$, $f(x,y)$), then it would be possible to determine two functions of the realm $[1, x, y]$, $\bar{R}_{\nu-2}$ and $\bar{f}$ so that

$$R_{\nu-2}\bar{R}_{\nu-2} + f\bar{f} = L(x),$$

where $L(x)$ belongs to the realm $[1, x]$ and $\not\equiv 0$ (modd. p, $g(x)$); we may consequently find belonging to the realm $[1, x]$ two functions $\bar{L}(x)$ and $\bar{g}(x)$ such that

$$L(x)\bar{L}(x) + g(x)\bar{g}(x) = c,$$

in which expression the integer $c \not\equiv 0 \pmod{p}$. We may finally find two integers $\bar{c}$ and $\bar{p}$ satisfying the identity

$$c\bar{c}+p\bar{p} = 1.$$

From this it is seen that unity becomes an element of the system, and therefore the system is a unit-system.

If then our system is not a unit-system, we may determine the element H_r, which is a divisor of both the elements H_1 and H_2 (modd. p, $g(x)$, $f(x,y)$) and we may therefore replace these elements by the one element $H_r(x,y,z)$.

Proceeding in the same way it is seen (in case the system is not a unit-system) that we may replace all the elements $H_1, H_2, \ldots$ by the one element H, which may be regarded as the greatest common divisor of these elements (modd. p, $g(x)$, $f(x,y)$).

Our system reduces then to the form

$$[p, g(x), f(x,y), H(x,y,z)].$$

We consider next the system

$$[p, g(x), f(x,y), N\{h(x,y,z)\}],$$

in which $f(x,y) \equiv f_1(x,y)f_2(x,y) \pmod{p, g(x)}$ and where $f_1(x,y)$ and $f_2(x,y)$ are irreducible with respect to these moduli. It is seen at once that

$$[p, g(x), f(x,y), N\{h(x,y,z)\}] \sim [p, g(x), f_1(x,y), N\{h(x,y,z)\}]\,[p, g(x), f_2(x,y), N\{h(x,y,z)\}].$$

It remains then to consider modular systems having the forms following:

Take first the system

$$[p, g(x), f(x,y)^2, f(x,y)N\{h(x,y,z)\}, N\{k(x,y,z)\}],$$

where the function $f(x,y)$ is irreducible (modd. p, $g(x)$).

It may be shown as on p. 275 that this system takes the form

$$[p, g(x), f(x,y)^2, f(x,y)H(x,y,z), K(x,y,z)].$$

If further we write

$$[p, g(x), f(x,y), H(x,y,z), K(x,y,z)] \sim [p, g(x), f(x,y), L(x,y,z)],$$

it is seen that $f(x,y)L(x,y,z)$ may be added to the system (a.) and then $f(x,y)H(x,y,z)$ may be dropped from this system. It also follows from this latter system that

$$K(x,y,z) = pA+gB+fC+LD,$$

where A, B, C, D are quantities belonging to the realm of integrity $[1, x, y, z]$, and so we may therefore write our system in the form

$$[p,\ g(x),\ f(x,y)^2,\ f(x,y)\,L(x,y,z),\ f(x,y)\,C(x,y,z)+L(x,y,z)\,D(x,y,z)].$$

In the same way

$$[d,\ g(x),\ f(x,y)^3,\ f(x,y)^2 N\{h(x,y,z)\},\ f(x,y)N\{k(x,y,z)\},\ N\{l(x,y,z)\}]$$
$$\sim [p,\ g(x),\ f(x,g)^3,\ f(x,y)^2 H(x,y,z),\ f(x,y)K(x,y,z),\ L(x,y,z)],$$

etc.

The systems in which the prime integer p, or the function $g(x)$ occurs to powers higher than the first are reduced in exactly the same manner as those already discussed for modular systems in which the elements involve only two variables.

If instead of the systems of the above form, we take the system

$$[N\{h(x,y,z)\}],$$

then, since the elements $h_1(x,y,z)$, $h_2(x,y,z)$, ... have no common divisor, it is in general possible to determine belonging to the realm $[1, x, y, z]$ functions $\bar{h}_1(x,y,z)$, $\bar{h}_2(x,y,z)$, ... such that

$$\text{(a.)} \qquad h_1(x,y,z)\,\bar{h}_1(x,y,z)+h_2(x,y,z)\,\bar{h}_2(x,y,z)+\cdots = f(x,y),$$

where $f(x,y)$ is a function belonging to the realm $[1, x, y]$.

In order then to say that the system $[N\{h(x,y,z)\}]$ is reducible to the form $[p, g(x), f(x,y), H(x,y,z)]$, we must assume that the given system contains integers and integral functions of one variable. If we do away with the assumption that there exist integers in the system, we may make the same reductions indicated above, if we change the realm of integrity by admitting into it also rational numbers as well as integers. If further we do away with the restriction that there must be present within the system integral functions of one variable, our reductions are still applicable, if we also admit into the realm of rationality in the place of integers and integral functions of that variable rational numbers and rational functions of the variable.

If, as a special case, the linear form (a.) is

$$h_1(x,y,z)\,\bar{h}_1(x,y,z)+h_2(x,y,z)\,\bar{h}_2(x,y,z)+\cdots = m(x)$$

where $m(x)$ is an integral function in x with integral coefficients, then we may replace the system by the product of several systems in which corresponding to the element $m(x)$ there appears the irreducible function $g(x)$

or a power of this function. To do this, however, we have to extend the realm of integrity by admitting within it rational numbers.

Suppose then, as on p. 293, that the functions $h_1(x,y,z)$, $h_2(x,y,z)$, ... have the form

$$h(x,y,z) = a_0(x,y)z^n + a_1(x,y)z^{n-1} + \cdots + a_n(x,y),$$

and that we may write

$$a_0(x,y) = a_{00}(y)y^m + a_{01}(x)y^{m-1} + \cdots + a_{0m}(x),$$

then we can find a function $\bar{a}_{00}(x)$ such that

$$a_{00}(x)\bar{a}_{00}(x) \equiv 1 \pmod{g(x)}.$$

We may therefore replace $h(x,y,z)$ by $\bar{a}_{00}(x)h(x,y,z) = H(x,y,z)$, say, where $H(x,y,z)$ when expanded is

$$H(x,y,z) = y^m z^n + A_1(x,y)z^{n-1} + \cdots + A_n(x,y),$$

the functions $A_1(x,y), \ldots A_n(x,y)$ being integral in x and y with rational coefficients. We may consequently perform all the reductions given in this paper, if we further admit into the realm of rationality rational functions of either of the variables y or z.

Geometrically interpreted, the given functions placed $= 0$ are equations of algebraic surfaces. In that we have taken outside of the system the greatest common divisor of the elements, if there exists one, there is no surface area common to all the surfaces. If there are n elements $h_1(x,y,z)$, $h_2(x,y,z), \ldots h_n(x,y,z)$, it may however happen that $n-1$ of them have a portion of surface area in common. This surface area may intersect the other surface and the projection of the curve thereby produced upon the xy-plane is contained as a factor in the function $f(x,y)$ of formula (a.).

It may further happen that a of these surfaces have a portion of surface area in common, while b others have in common a portion of surface area as also c others, where $a+b+c \leqq n$.

Then it may be that the surface area common to the surfaces (a) are cut by the surface area common to the the surfaces (b) and by the surface area common to the surfaces (c). We may thus derive several such functions $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, ... as the function $f(x,y)$ in formula (a.). If there is no portion of curve common to all of a certain number of the curves $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$, ..., but if these curves have points of inter-

section or contact, it is always possible to find integral functions in x, y with integral coefficients $\bar{f}_1(x,y)$, $\bar{f}_2(x,y)$, ... such that

$$f_1(x,y)\bar{f}_1(x,y)+f_2(x,y)\bar{f}_2x,y)+\cdots = g(x),$$

where $g(x)$ is an integral function in x with integral coefficients and contains the projections of the points of intersection of the curves upon the x-axis.

Finally, if we can derive systems of points $g(x) = 0$, $g_1(x) = 0$, ..., and if there is no point common to all these systems, we may find functions integral in x with integral coefficients $\bar{g}(x)$, $\bar{g}_1(x)$, ... so that

$$g(x)\bar{g}(x)+g_1(x)\bar{g}_1(x)+\cdots = c,$$

where c is an integer.

If on the other hand we have in our modular system the prime integer p and the irreducible functions $g(x)$ (mod. p) and $f(x,y)$ (modd. p, $g(x)$, then everything (surface area, portion of curve, system of points, etc.) which is common to the modular system $[p, g(x), f(x,y), N\{h(x,y,z)\}]$ is common to the system $[p, g(x), f(x,y), H(x,y,z)]$ where $H(x,y,z)$ is the greatest common divisor (modd. p, $g(x)$, $f(x,y)$) of the elements $h_1(x,y,z)$, $h_2(x,y,z)$, ...

We may say that the surface $H(x,y,z) = 0$ is common to the surfaces $h_1(x,y,z) = 0$, $h_2(x,y,z) = 0$, ... (modd. p, $g(x)$, $f(x,y)$).

Die Nullstellen der *Bessel*schen Functionen.

(Von Herrn *Paul Schafheitlin* in Berlin.)

Die Nullstellen analytischer Functionen beanspruchen nicht nur vom rein theoretischen Standpunkt aus besonderes Interesse, sondern sie spielen auch in den Anwendungen auf physikalische Probleme eine hervorragende Rolle. Es sind daher auch in neuerer Zeit mehrere Abhandlungen den Nullstellen verschiedener Functionen gewidmet worden; von den Herren *Klein**) und *Hurwitz***) ist für die hypergeometrische Reihe nach zwei verschiedenen Methoden die Anzahl der Nullstellen zwischen 0 und 1 ermittelt worden; von Herrn *Hurwitz****) ist schon früher der Nachweis geliefert worden, dass für positive Indices n die Nullstellen der *Bessel*schen Functionen $J^n_{(x)}$ reell sind. Genaueres über die Lage der einzelnen Nullstellen dieser Functionen ist in einwandfreier Weise, so viel ich gesehen habe, noch nicht ermittelt worden ausser dem schon längst bekannten Resultat, dass für unendlich grosse Werthe von x die Function J^n gegen $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)$ convergirt, woraus in einfacher Weise der Wurzelgrenzwerth sich ergiebt. Von Herrn *Meissel*†) für J^0, und in allgemeinerer Weise von Herrn *McMahon*††) sind Formeln zur Berechnung der einzelnen Nullstellen

*) Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. Bd. 37.

**) Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. Bd. 38.

***) Ueber die Nullstellen der *Bessel*schen Function. Math. Ann. Bd. 33.

†) Ueber die *Bessel*schen Functionen J^0_k und J^1_k. Programm der Oberrealschule in Kiel 1890.

††) On the roots of the *Bessel* and certain related functions. Annals of Math. Bd. 9.

angegeben worden; indessen sind nur die ersten Glieder der betreffenden Reihen, nicht aber das allgemeine Glied derselben angegeben, ebensowenig ist über die Convergenz der Entwickelung etwas bemerkt worden. So sind diese Reihen wohl zur praktischen Berechnung nützlich, aber allgemeine Schlüsse über die Grenzen, zwischen denen je eine Nullstelle zu suchen ist, lassen sich nicht daraus ziehen. Ein Versuch in dieser Beziehung ist von Herrn *Rudsky**) unternommen worden; seine Ergebnisse sind aber, abgesehen davon, dass sie nur auf solche Functionen, deren Indices die Hälften ungerader ganzer Zahlen sind, sich beschränken, insofern unrichtig, als die angegebenen Grenzen nur für die höheren Nullstellen Geltung haben, nicht aber, wie der Verfasser behauptet, für sämmtliche. Eine Reihe interessanter Eigenschaften, speciell über die gegenseitige Lage der Wurzeln benachbarter Functionen, ist von Herrn *Bôcher***) gegeben worden. In einer kürzlich erschienenen neuen Note***) hat derselbe gezeigt, dass das Intervall zweier auf einander folgenden Wurzeln von J^0 kleiner als 4,810 ist, während ich schon früher†) gezeigt habe, dass dieses Intervall kleiner als π ist. Ich glaube daher, dass die folgenden Angaben, wenn sie auch keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben können, einiges Interesse erwecken werden. Auch die *Bessel*schen Functionen zweiter Art werde ich mit besprechen, wobei ich bemerke, dass ich hierunter im Gegensatz zu den Herren *Graf* und *Gubler*††), aber wohl im Einklang mit den meisten Mathematikern die zweite Lösung der *Bessel*schen Differentialgleichung verstehe.

I. Die erste Nullstelle der Function J^n.

Als Hauptformeln aus der Theorie der *Bessel*schen Functionen sind bekannt:

$$\text{I.}\quad \frac{d^2J^n}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ^n}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J^n=0,$$

---

*) Sur la situation des racines de $J^{n+\frac{1}{2}}=0$. Mém. d. l. Soc. Royale des Sciences de Liége (2). Bd. 18, 1895.

**) On certain methods of *Sturm*. Bull. Americ. Math. Soc. (2). Bd. 3 1897.

***) An elementary proof that *Bessel*s functions of the zeroth order have an infinite number of real roots. Bull. Americ. Math. Soc. (2). Bd. 7 1899.

†) Ueber die *Gauss*sche und *Bessel*sche Differentialgleichung. Dieses Journal Bd. 114.

††) Einleitung in die Theorie der *Bessel*schen Functionen. I, II. Bern 1898, 1900.

II. $$\frac{2n}{x} J^n = J^{n-1} + J^{n+1},$$

III. $$2\frac{dJ^n}{dx} = J^{n-1} - J^{n+1},$$

IV. $$J^{n-1} = \frac{n}{x} J^n + \frac{dJ^n}{dx},$$

V. $$J^{n+1} = \frac{n}{x} J^n - \frac{dJ^n}{dx},$$

VI. $$\frac{dJ^{n-1}}{dx} = -\left(1 - \frac{n(n-1)}{x^2}\right) J^n + \frac{n-1}{x}\frac{dJ^n}{dx},$$

VII. $$\frac{dJ^{n+1}}{dx} = \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) J^n + \frac{n+1}{x}\frac{dJ^n}{dx},$$

VIII. $$(n+1) J^{n-2} + 2n\left(1 - \frac{2(n-1)(n+1)}{x^2}\right) J^n + (n-1) J^{n+2} = 0,$$

IX. $$J^{n-2} = -\left(1 - \frac{2n(n-1)}{x^2}\right) J^n + \frac{2(n-1)}{x}\frac{dJ^n}{dx},$$

X. $$J^{n+2} = -\left(1 - \frac{2n(n+1)}{x^2}\right) J^n - \frac{2(n+1)}{x}\frac{dJ^n}{dx}.$$

Die Formeln IV.—X. ergeben sich durch einfache Combination der Hauptformeln II. und III.; durch wiederholte Anwendung von II. erhält man die im wesentlichen schon von Herrn *Lommel**) angegebenen Formeln:

XI. $$J^{n+p} = J^n \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(n+p-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(n+\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} - J^{n-1} \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\Pi(n+p-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\Pi(n+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1},$$

XII. $$J^{n-p} = J^n \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(n-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(n-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} - J^{n+1} \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\Pi(n-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\Pi(n-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}.$$

Die Reihen in diesen beiden Formeln, worin p eine positive ganze Zahl bedeutet, brechen von selbst für $\lambda = \frac{p}{2}$ resp. $\frac{p-1}{2}$ ab. In allen Formeln ist der Einfachheit halber das Argument x weggelassen worden; alle 12 Formeln gelten ferner unverändert für Y^n; zwischen den beiden Arten bestehen die Gleichungen:

XIII. $$Y^n \frac{dJ^n}{dx} - J^n \frac{dY^n}{dx} = \frac{2}{\pi x},$$

XIV. $$Y^n J^{n-1} - J^n Y^{n-1} = \frac{2}{\pi x};$$

---

*) Studien über die *Bessel*schen Functionen. Leipzig 1868.

es unterscheidet sich Y^n von dem *Lommel*schen*) durch den Factor $-\frac{\pi}{2}$, von dem *Hankel*schen**) durch den Factor $-\pi$.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf den Fall eines reellen positiven Index n grösser als Null. Die Functionen J^n sind überall im Endlichen selbst endlich und stetig und dasselbe gilt von allen Differentialquotienten, für die letzteren bei gebrochenem n mit Ausnahme des Nullpunktes. Die Variable x soll alle möglichen reellen, positiven Werthe annehmen; für $x = 0$ verschwindet J^n, im folgenden wird diese Nullstelle nicht gezählt.

Aus der bekannten Reihenentwickelung:

$$J^n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{\Pi\lambda\, \Pi(n+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}$$

erkennt man, dass für kleine Werthe von x die Function J^n positive Werthe besitzt. Vor der ersten Nullstelle besitzt daher J^n einen positiven Maximalwerth; hierfür ist also J^n positiv, $\frac{dJ^n}{dx} = 0$, $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ negativ; es muss also nach I. für die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$, erst recht also für die erste Nullstelle von J^n das Argument $x > n$ sein. Hieraus wieder folgt aus I., dass $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ für $x = n$ negativ ist. Für $n > 1$ ist $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ für kleine Werthe von x positiv; es liegt also die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ vor $x = n$. Differentiirt man I., so erhält man:

$$\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)\frac{d^3J^n}{dx^3} + \frac{1}{x}\left(1-\frac{3n^2}{x^2}\right)\frac{d^2J^n}{dx^2} + \left(1-\frac{2n^2+1}{x^2}+\frac{n^2(n^2-1)}{x^4}\right)\frac{dJ^n}{dx} = 0.$$

Verschwindet $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ zum ersten Male, so hat $\frac{dJ^n}{dx}$ ein positives Maximum, demnach ist $\frac{d^3J^n}{dx^3}$ negativ und es muss daher der Factor von $\frac{dJ^n}{dx}$ in dieser Differentialgleichung negativ sein; es ist also:

$$x^2 > \frac{2n^2+1-\sqrt{8n^2+1}}{2}.$$

---

*) Zur Theorie der *Bessel*schen Functionen. Math. Ann. Bd. 4.

**) Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Math. Ann. Bd. 1.

Die Wurzel aus diesem Bruch ist eine untere Grenze für die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$; erst recht ist dann $n-1$ kleiner als diese Nullstelle, die also zwischen $n-1$ und n liegt.

Wie schon bemerkt wurde, ist die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ grösser als n. Für diese Stelle ist J^n positiv, der Factor von J^n in VI. negativ, daher $\frac{dJ^{n-1}}{dx}$ negativ; es liegt also die erste Nullstelle von $\frac{dJ^{n-1}}{dx}$ vor der von $\frac{dJ^n}{dx}$; die Functionen $\frac{dJ^{n+p}}{dx}$, wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, sind für alle Werthe von x, die kleiner oder gleich dem ersten Nullwerth von $\frac{dJ^n}{dx}$ sind, positiv.

Durch Differentiation folgt aus X. bei Rücksicht auf I.:

$$\frac{dJ^{n+2}}{dx} = \frac{2(n+1)}{x}\left(1-\frac{n(n+2)}{x^2}\right)J^n - \left(1-\frac{2(n+1)(n+2)}{x^2}\right)\frac{dJ^n}{dx}.$$

Für die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ muss nach der obigen Bemerkung der Factor von J^n positiv, d. h. $x^2 > n(n+2)$ sein.

Ist J^n zum ersten Male Null, so ist $\frac{dJ^n}{dx}$ negativ; es ergiebt sich daher aus IV., dass auch J^{n-1} negativ ist. Die erste Nullstelle von J^{n-1} liegt also vor der von J^n; die Functionen J^{n+p} sind für alle Werthe von x, die kleiner oder gleich der ersten Nullstelle von J^n sind, positiv. Mit Rücksicht hierauf folgt aus X., dass für die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ der Factor von J^n positiv, also $x^2 < 2n(n+1)$ sein muss. Hieraus folgt:

Die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ ***liegt zwischen*** $\sqrt{n(n+2)}$ ***und*** $\sqrt{2n(n+1)}$.

Aus VIII. erkennt man sofort, dass die erste Nullstelle von J^{n-2} vor $x^2 = 2(n-1)(n+1)$ liegt; da ferner die erste Nullstelle von J^n nach der von $\frac{dJ^n}{dx}$ liegt, so folgt:

Die erste Nullstelle von J^n ***liegt zwischen*** $\sqrt{n(n+2)}$ ***und*** $\sqrt{2(n+1)(n+3)}$.

Vermöge I. folgt aus V. und VII.

$$\frac{1}{x}J^{n+1} = \left(1-\frac{n(n-1)}{x^2}\right)J^n + \frac{d^2J^n}{dx^2},$$

$$\frac{dJ^{n+1}}{dx} = -n\left(1-\frac{(n+1)(n-1)}{x^2}\right)J^n - (n+1)\frac{d^2J^n}{dx^2}.$$

Da für die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ sowohl J^n, J^{n+1} als auch $\frac{dJ^{n+1}}{dx}$ positiv sind, so ergiebt sich aus diesen beiden Formeln:

Die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ ***liegt zwischen*** $\sqrt{n(n-1)}$ ***und*** $\sqrt{(n+1)(n-1)}$.

Aus XI. ergiebt sich für $p = 6$ falls J^n verschwindet:

$$J^{n+6} = -J^{n-1} \cdot \frac{2(n+3)}{x}\left\{3 - \frac{16(n+2)(n+4)}{x^2} + \frac{16(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)}{x^4}\right\}.$$

Für die erste Nullstelle von J^n ist J^{n-1} negativ, J^{n+6} positiv; es muss also die Klammer in diesem Ausdruck positiv sein. Für die obere Grenze $\sqrt{2(n+1)(n+3)}$ ist sie negativ; für $x = \sqrt{2(n+1)(n+2)}$ hat sie den Werth $-\frac{n^2+3n-22}{(n+1)(n+2)}$ und ist also für $n \geqq 3\frac{1}{2}$ auch negativ; daher liegt die erste Nullstelle von J^n für $n \geqq 3\frac{1}{2}$ vor $\sqrt{2(n+1)(n+2)}$.

Herr ***Rudski*** giebt in der erwähnten Note an, dass die erste Wurzel von $J^{n+\frac{1}{2}}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, zwischen $(n+1)\frac{\pi}{2}$ und $(n+2)\frac{\pi}{2}$ liegt. Es ist dieses Resultat nicht richtig; die erste Wurzel liegt sicher vom Index $8\frac{1}{2}$ an vor dem von Herrn ***Rudski*** angegebenen Intervall. Denn aus dem obigen Grenzwerth folgt für den Index $8\frac{1}{2}$, dass $x < \sqrt{199{,}5} < 14{,}125$ ist, während $\frac{9}{2}\pi > 14{,}137$ ist. Thatsächlich ist jenes Ergebniss schon vom Index $5\frac{1}{2}$ an unrichtig, wie die von Herrn ***Lommel****) berechneten Tabellen für $J^{n+\frac{1}{2}}$ zeigen.

Auf dem hier angedeuteten Wege durch zweckmässige Verbindung der Formeln XI. und XII. mit den anderen Hauptformeln lassen sich die Grenzen für die ersten Nullstellen von J^n und $\frac{dJ^n}{dx}$ wesentlich enger ziehen, wie ich dies in einer späteren Note zu zeigen beabsichtige.

II. Die höheren Nullstellen von J^n und Y^n.

Es ist mir nicht gelungen, ähnliche einfache Grenzen für die zweite und die nächstfolgenden Nullstellen für grössere Werthe des Index n anzugeben; für die höheren Nullstellen habe ich dagegen verhältnissmässig gute

*) Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. d. Akad. d. Wiss. zu München Cl. 2, Bd. 15 Abth. 3, 1886.

Resultate erzielt und zwar im Anschluss an die von mir am angegebenen Orte abgeleitete Integralform von J^n und Y^n. Es ist:

$$J^n(x) = \frac{2^{n+1}x^n}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(x-\frac{2n-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2n+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\omega.$$

Da für die Nullstellen der Factor des Integrals keine Rolle spielt, so soll dieses selbst nur untersucht und kurz durch K^n bezeichnet werden. Setzt man $x = k\pi+\varepsilon$, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet und $0<\varepsilon\leqq\pi$ ist, so ist:

$$(1.)\qquad (-1)^k K^n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(\varepsilon-\frac{2n-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2n+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\omega.$$

Zerlegt man dieses Integral in Theilintegrale mit den Grenzen

$$g_0 = 0,\quad g_1 = \frac{2\varepsilon}{2n-1},\quad g_2 = \frac{2\varepsilon+2\pi}{2n-1}\ \cdots\ g_r = \frac{2\varepsilon+2(r-1)\pi}{2n-1},\ \cdots$$

so wird das erste Integral positiv, das zweite negativ sein und alle folgenden Integrale abwechselnd positives und negatives Vorzeichen besitzen; es ist zu untersuchen, welches Vorzeichen die ganze Summe erhält. Bezeichnet man zur Abkürzung die Function unter dem Integralzeichen in (1.) mit φ_n, so ist:

$$\int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \varphi_n d\omega = \frac{2}{2n+1}\int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \operatorname{cotg}^{2n+1}\omega e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}\omega\right)}{\cos^{n+\frac{1}{2}}\omega}$$

$$< \frac{2}{2n+1}\operatorname{cotg}^{2n+1} g_{2r+1} e^{-2x\operatorname{cotg} g_{2r+1}} \left\{ \frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r+1}\right)}{\cos^{n+\frac{1}{2}} g_{2r+1}} - \frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r}\right)}{\cos^{n+\frac{1}{2}} g_{2r}} \right\}.$$

Benutzt man die obigen Werthe für g, so erhält man:

$$\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r+1}\right) = \cos g_{2r+1},$$

$$\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r}\right) = -\cos g_{2r},$$

folglich ist:

$$\int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \varphi_n d\omega < \frac{2}{2n+1}\operatorname{cotg}^{2n+1} g_{2r+1} e^{-2x\operatorname{cotg} g_{2r+1}} \left\{ \frac{1}{\cos^{n-\frac{1}{2}} g_{2r+1}} + \frac{1}{\cos^{n-\frac{1}{2}} g_{2r}} \right\}$$

also erst recht:

$$(2.)\qquad \int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \varphi_n d\omega < \frac{4}{2n+1}\cdot\frac{\cos^{n+\frac{3}{2}} g_{2r+1}\,.\,e^{-2x\operatorname{cotg} g_{2r+1}}}{\sin^{2n+1} g_{2r+1}}.$$

Diese Ungleichheit gilt aber nur unter der Bedingung, dass die Function $\operatorname{cotg}^{2n+1}\omega e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}$ mit wachsendem ω zunimmt und dies ist der Fall, wenn $\operatorname{tg}\omega < \frac{2x}{2n+1}$ oder

$$\omega < \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{2n+1}. \tag{3.}$$

Ferner ist:

$$-\int_{g_{2r+1}}^{g_{2r+2}} \varphi_n d\omega = -\frac{2}{2n-1}\int_{g_{2r+1}}^{g_{2r+2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega}{\sin^{2n+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\cos\left(\varepsilon - \frac{2n-1}{2}\omega\right)$$

$$> \frac{2}{2n-1}\cdot\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}g_{2r+1}}{\sin^{2n+1}g_{2r+1}} e^{-2x\operatorname{cotg}g_{2r+1}}\left\{\cos\left(\varepsilon - \frac{2n-1}{2}g_{2r+1}\right) - \cos\left(\varepsilon - \frac{2n-1}{2}g_{2r+2}\right)\right\},$$

also:

$$-\int_{g_{2r+1}}^{g_{2r+2}} \varphi_n d\omega > \frac{4}{2n-1}\cdot\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}g_{2r+1}\cdot e^{-2x\operatorname{cotg}g_{2r+1}}}{\sin^{2n+1}g_{2r+1}}. \tag{4.}$$

Diese Ungleichheit gilt solange $\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega}{\sin^{2n+1}\omega}\cdot e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}$ mit wachsendem ω zunimmt, d. h. solange ω kleiner ist als die reelle Wurzel ω_1 der Gleichung

$$4x - 2(2n+1)\operatorname{tg}\omega + 4x\operatorname{tg}^2\omega - (2n-1)\operatorname{tg}^3\omega = 0. \tag{5.}$$

Diese Gleichung hat für $n \geqq 1$ nur eine reelle Wurzel.

Setzt man $\operatorname{tg}\omega = \frac{4x}{2n+1}$, so erhält die linke Seite von 5. den Werth

$$\frac{4x}{(2n+1)^3}(32x^2 - (2n+1)^3).$$

Ist daher

$$x^2 > \frac{(2n+1)^3}{32}, \tag{5^a.}$$

so ist:

$$\omega_1 > \operatorname{arc\,tg}\frac{4x}{2n+1}. \tag{5^b.}$$

Des einfacheren Ausdrucks wegen soll zunächst n ganzzahlig angenommen werden; es muss unterschieden werden, ob n gerade oder ungerade ist.

1. Fall. n gerade gleich $2m$. Es besteht $(-1)^k K^{2m}$ aus $m+1$ Teilintegralen; die Grenzen des letzten sind $\frac{2\varepsilon + 2(m-1)\pi}{4m-1}$ und $\frac{\pi}{2}$. Ist aber

$\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$, so fehlt das letzte Integral und es besteht alsdann K^{2m} nur aus m Theilintegralen. Ist nun m selbst eine gerade Zahl, der Index der Function J also durch 4 theilbar und ist

$$\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi, \tag{6.}$$

so enthält K^{2m} eine gerade Anzahl Integrale. Aus (2.) und (4.) folgt, dass wenn man von vorn anfangend je zwei auf einander folgende Integrale zusammenfasst, diese Summe negativ wird; es ist also die Summe der $m-2$ ersten Theilintegrale negativ, vorausgesetzt dass die Bedingungen (3.), (5^a.) und (5^b.) erfüllt sind.

Das vorletzte, $(m-1)$-te Integral ist

$$\int_{g_{m-2}}^{g_{m-1}} \varphi_{2m}\, d\omega < \frac{4}{4m+1} \cdot \frac{\cos^{2m+\frac{3}{2}} g_{m-1} \cdot e^{-2x \operatorname{cotg} g_{m-1}}}{\sin^{4m+1} g_{m-1}}, \tag{7.}$$

unter der Bedingung, dass $g_{m-1} < \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{4m+1}$ ist. Da für alle in Frage kommenden Werthe von x der letzte Bruch unecht ist, so ist diese Ungleichheit sicher erfüllt, wenn

$$g_{m-1} = \frac{2\varepsilon + 2(m-2)\pi}{4m-1} < \frac{\pi}{2} - \frac{4m+1}{2x}$$

oder wenn

$$x > \frac{(4m-1)(4m+1)}{7\pi - 4\varepsilon} \tag{8.}$$

ist. Liegt die Wurzel ω_1 von (5.) innerhalb des letzten Integrals, ist also

$$\omega_1 = g_{m-1} + \varrho, \tag{9.}$$

wo $\varrho < \frac{2\pi}{4m-1}$ ist, so erhält man für das letzte Integral:

$$-\int_{g_{m-1}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{2m}\, d\omega > -\int_{g_{m-1}}^{\omega_1} \varphi_{2m}\, d\omega > \frac{4}{4m-1} \cdot \frac{\cos^{2m-\frac{1}{2}} g_{m-1} \cdot e^{-2x \operatorname{cotg} g_{m-1}}}{\sin^{4m+1} g_{m-1}} \cdot \sin^2\left(\frac{4m-1}{4}\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{10.}$$

Ist (5^a.) erfüllt, so ist nach (5^b.)

$$\omega_1 > \operatorname{arc\,tg} \frac{4x}{4m+1}$$

also

$$\omega_1 > \frac{\pi}{2} - \frac{4m+1}{4x}$$

oder nach (9.)

$$\varrho > \frac{\pi}{2} - g_{m-1} - \frac{4m+1}{4x};$$

ist nun die Ungleichheit (8.) erfüllt, so folgt

(11.) $$\varrho > \frac{7\pi - 4\varepsilon}{4(4m-1)};$$

sobald also (5ª.) und (8.) erfüllt sind, ist ϱ positiv; es liegt also alsdann ω_1 im letzten Integral.

Aus (7.) und (10.) folgt nun, dass auch die beiden letzten Integrale ein negatives Resultat liefern, wenn

$$\frac{1}{4m+1}\cos^2 g_{m-1} < \frac{1}{4m-1}\sin^2\left(\frac{4m-1}{4}\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

also erst recht, wenn mit Rücksicht auf (9.)

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - g_{m-1}\right) < \sin^2\frac{4m-1}{4}\varrho$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - g_{m-1} < \frac{4m-1}{4}\varrho$$

oder wenn

(12.) $$\varrho > \frac{2(7\pi - 4\varepsilon)}{(4m-1)^2}$$

ist; diese Ungleichheit ist aber nach (11.) erfüllt, sobald

$$4m-1 > 8$$

ist oder

(13.) $$m > 2\tfrac{1}{4}$$

ist. Sind die Bedingungen (8.) und (13.) erfüllt, so ist von selbst (5ª.) erfüllt; sobald ferner die Formeln (7.) und (10.) Gültigkeit besitzen, sind auch die Bedingungen (3.), (5ª.) und (5ᵇ.) für die ersten $m-2$ Integrale erfüllt. Da m nur ganze Zahlwerthe annehmen kann, so wird die untere Grenze für m in (13.) auf 3 zu erhöhen sein und man erhält den Satz:

I. *Ist m eine gerade Zahl grösser oder gleich* 3 *und* $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$, *so hat* $(-1)^k K^{2m}$ *einen negativen Werth, sobald* $x > \frac{(4m-1)(4m+1)}{7\pi - 4\varepsilon}$ *ist.*

Wenn aber m ungerade ist, also der Index von J congruent 2 (mod. 4) ist, so hat K^{2m} eine gerade Anzahl Integrale, wenn $\varepsilon < \frac{3}{4}\pi$ ist. Völlig die nämliche Betrachtung liefert hier das Ergebniss:

II. ***Ist m eine ungerade Zahl grösser oder gleich*** 3 ***und*** $\varepsilon < \frac{3}{4}\pi$, ***so hat*** $(-1)^k K^{2m}$ ***einen negativen Werth, sobald*** $x > \frac{(4m-1)(4m+1)}{3\pi - 4\varepsilon}$ ***ist.***

2. Fall. n ungerade gleich $2m+1$. Führt man für K^{2m+1} dieselben Betrachtungen wie oben aus, so erhält man:

III. ***Ist m eine gerade Zahl grösser oder gleich*** 2 ***und*** $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$, ***so hat*** $(-1)^k K^{2m+1}$ ***einen negativen Werth, sobald*** $x > \frac{(4m+1)(4m+3)}{\pi - 4\varepsilon}$ ***ist.***

IV. ***Ist m eine ungerade Zahl grösser als*** 2 ***und*** $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{4}$, ***so hat*** $(-1)^k K^{2m+1}$ ***einen negativen Werth, sobald*** $x > \frac{(4m+1)(4m+3)}{5\pi - 4\varepsilon}$ ***ist.***

Es hat gar keine Schwierigkeit, diese Betrachtungen auf gebrochene Indices zu übertragen. Bezeichnet man den Index mit $n+\nu$, wo n eine ganze Zahl und ν einen echten Bruch bedeutet, der die Bedingung $-\frac{1}{2} < \nu \leqq +\frac{1}{2}$ erfüllt, so hat man wie oben die 4 Fälle für n zu unterscheiden und erhält:

Ia. ***Ist m eine gerade Zahl derart, dass*** $m \geqq \frac{9-2\nu}{4}$ ***ist und ist*** $\varepsilon \geqq \frac{3+2\nu}{4}\pi$, ***so hat*** $(-1)^k K^{2m+\nu}$ ***einen negativen Werth, sobald***

$$x > \frac{(4m+2\nu-1)(4m+2\nu+1)}{(7+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \text{ ist.}$$

IIa. ***Ist m eine ungerade Zahl derart, dass*** $m \geqq \frac{9-2\nu}{4}$ ***ist und ist*** $\varepsilon < \frac{3+2\nu}{4}\pi$, ***so hat*** $(-1)^k K^{2m+\nu}$ ***einen negativen Werth, sobald***

$$x > \frac{(4m+2\nu-1)(4m+2\nu+1)}{(3+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \text{ ist.}$$

IIIa. ***Ist m eine gerade Zahl derart, dass*** $m \geqq \frac{7-2\nu}{4}$ ***ist und ist*** $\varepsilon < \frac{1+2\nu}{4}\pi$, ***so hat*** $(-1)^k K^{2m+\nu+1}$ ***einen negativen Werth, sobald***

$$x > \frac{(4m+2\nu+1)(4m+2\nu+3)}{(1+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \text{ ist.}$$

IVa. ***Ist m eine ungerade Zahl derart, dass*** $m \geqq \frac{7-2\nu}{4}$ ***ist und ist*** $\varepsilon \geqq \frac{1+2\nu}{4}\pi$, ***so hat*** $(-1)^k K^{2m+\nu+1}$ ***einen negativen Werth, sobald***

$$x > \frac{(4m+2\nu+1)(4m+2\nu+3)}{(5+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \quad \textit{ist.}$$

Für alle Sätze gilt die Gleichung $x = k\pi + \varepsilon$, wo $0 < \varepsilon \leqq \pi$ ist.

Ist im Index $n+\nu$ die ganze Zahl $n \equiv \mu \pmod 4$, wo μ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 bedeutet, so kann man zusammenfassend sagen, dass über das Vorzeichen von $J^{n+\nu}$ in den oben angegebenen Intervallen für ε sich eine bestimmte Aussage machen lässt, sobald $x > \frac{4(n+\nu)^2-1}{(2\mu+2\nu-1)\pi-4\varepsilon}$ ist.

Des bequemeren Ausdruckes wegen soll in Zukunft vorwiegend von ganzzahligen Indices gesprochen werden; es lassen sich ohne Mühe die Sätze auf gebrochene Indices übertragen.

Ist $x > \frac{4n^2-1}{(2\mu-1)\pi-4\varepsilon}$, so haben sämmtliche Functionen J^{n-4p}, wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, dasselbe Vorzeichen wie J^n.

Um sich in dem Ausdruck für x von ε frei zu machen, kann man demselben seinen grössten Werth beilegen; es geht dies ohne weiteres für $\mu = 3$ und 4; für $\mu = 2$ oder 3 aber wird für den grössten Werth von ε der Nenner Null. Um für $\mu = 2$ zu einem bestimmten Werthe zu gelangen, beschränke man ε auf das Intervall von Null bis $\frac{\pi}{2}$. Es ist dann:

$(-1)^k K^n$ für $n \equiv 0 \pmod 4$ und $x > \frac{4n^2-1}{3\pi}$ negativ für $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$,

„ „ $n \equiv 2$ „ „ $x > \frac{4n^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

„ „ $n \equiv 3$ „ „ $x > \frac{4n^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$.

Bei Benutzung von Formel VIII. folgt hieraus:

$(-1)^k K^n$ ist für $n \equiv 0$ und $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ positiv für $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

„ „ $n \equiv 2$ „ $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$,

„ „ $n \equiv 1$ „ $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$.

Wählt man des einfacheren Ausdruckes wegen allgemein den grössten der hier vorkommenden Werthe von x, so erhält man:

V. *Ist* $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$, *so liegen die Nullstellen von* $J^n(x)$ *in den Intervallen* $(k+\frac{1}{2})\pi$ *und* $(k+\frac{3}{4})\pi$ *resp.* $k\pi$ *und* $(k+\frac{1}{4})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

Die Möglichkeit für das Auftreten eines Zeichenwechsels von J^n ist hiernach für die höheren Nullstellen auf ein Intervall von $\frac{\pi}{4}$ beschränkt worden; es ist selbstverständlich, dass bei wachsendem x dies Gebiet durch die allgemeineren Formeln, in denen ε enthalten ist, noch erheblich verengert werden kann. Wie schon erwähnt, darf aber für $\mu = 2$ und 3 niemals ε den Maximalwerth $\frac{3}{4}\pi$ oder $\frac{\pi}{4}$ annehmen. Es convergiren also die höheren Nullstellen gegen diese Werthe, ***ohne sie aber je zu überschreiten.***

Ferner erkennt man, dass zwei Functionen, deren Indices sich um 2 unterscheiden, entgegengesetzte Vorzeichen haben ausser in den Intervallen $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{4}$ resp. 0 bis $\frac{\pi}{4}$, je nachdem der Index gerade oder ungerade ist. Daraus folgt vermöge Formel III.:

VI. ***Ist*** $x > \frac{4(n+3)^2-1}{\pi}$, ***so liegen die Maxima und Minima von*** $J^n(x)$ ***in den Intervallen*** $k\pi$ ***und*** $(k+\frac{1}{4})\pi$ ***resp.*** $(k+\frac{1}{2})\pi$ ***und*** $(k+\frac{3}{4})\pi$, ***je nachdem*** n ***gerade oder ungerade ist.***

Da die hier gegebenen Intervalle für das Auftreten eines extremen Werthes völlig getrennt von den in V. gegebenen Intervallen für das Auftreten der Nullstellen sind, so folgt, dass in den oben gegebenen Intervallen für die Nullstellen auch stets nur eine Nullstelle liegt. Die Differenz zweier auf einander folgenden Wurzeln von J^n ist also für $x > \frac{4(n+3)^2-1}{\pi}$ grösser als $\frac{3\pi}{4}$ und kleiner als $\frac{3\pi}{2}$.

Giebt man in den Sätzen Ia.—IVa. dem Bruche ν den Werth $+\frac{1}{2}$, so erhält man ganz ebenso leicht:

VII. ***Ist*** $x > \frac{4(n+\frac{5}{2})^2-1}{\pi}$, ***so liegen die Nullstellen von*** $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$ ***in den Intervallen*** $(k+\frac{3}{4})\pi$ ***und*** π ***resp.*** $(k+\frac{1}{4})\pi$ ***und*** $(k+\frac{1}{2})\pi$, ***je nachdem*** n ***gerade oder ungerade ist.***

Herr ***Rudski*** giebt in seiner schon erwähnten Abhandlung an, dass sämmtliche Nullstellen von $J^{n+\frac{1}{2}}$ zwischen $(n+2k+1)\frac{\pi}{2}$ und $(n+2k+2)\frac{\pi}{2}$ liegen. Wenn auch, wie oben gezeigt wurde, dieses Resultat für die ersten

Nullstellen unrichtig ist, so bestätigt der letzte Satz die Richtigkeit für die höheren Nullstellen; allerdings geht Satz VII. über die Behauptung des Herrn *Rudski* hinaus; denn während bei diesem das Intervall für das Auftreten einer Wurzel $\frac{\pi}{2}$ beträgt, ist es in VII. auf $\frac{\pi}{4}$ eingeschränkt.

Für die *Bessel*sche Function zweiter Art habe ich*) folgende Definitionsgleichung gegeben:

$$Y^n(x) = \frac{2^{n+1}\cdot x^n}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega\cos(x-\frac{2n-1}{2}\omega)}{\sin^{2n+1}\omega}\,e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega.$$

Setzt man hierin $x = (k-\frac{1}{2})\pi+\varepsilon'$, wo $0<\varepsilon'\leqq\pi$ ist, so geht das Integral in $(-1)^k K^n$ über und man erhält daher für Y^n genau dieselben Sätze wie für J^n; will man aber dieselbe Substitution nämlich $x = k\pi+\varepsilon$ anwenden, so braucht man in den oben ermittelten Sätzen nur $\frac{\pi}{2}$ von ε abzuziehen und erhält beispielsweise:

VIII. *Ist* $x>\frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$, *so liegen die Nullstellen von* $Y^n(x)$ *in den Intervallen* $k\pi$ *und* $(k+\frac{1}{4})\pi$ *resp.* $(k+\frac{1}{2})\pi$ *und* $(k+\frac{3}{4})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

III. Die *Bessel*schen Functionen nullter bis vierter Ordnung.

Bei den Beweisen des vorigen Abschnitts mussten wegen der Ungleichheit (13.) und den entsprechenden für die anderen Fälle die Indices unter $4\frac{1}{2}$ ausgeschlossen werden; es erübrigt noch diese Lücke wenigstens für ganze Indices auszufüllen.

1. Der Fall $n = 0$ ist früher von mir erledigt worden**); es hat sich ergeben:

---

*) Dieses Journ. Bd. 114.

**) Ibid. Der dort gegebene Beweis hat für Y^0 eine kleine Lücke; für die erste mögliche Nullstelle $\left(x\geqq\frac{\pi}{4}\right)$ von Y^0 ist die dort mit (31ª.) bezeichnete Ungleichheit für $\varepsilon = \frac{\pi}{8}$ nicht erfüllt. Es lässt sich (30.) leicht ändern in $\psi > \frac{4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\cos 2\varepsilon\sqrt{\sin 2\varepsilon}}\cdot e^{-2x\operatorname{tg}2\varepsilon}$: dann wird (31ª) $x>\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos 2\varepsilon}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$, also für $\varepsilon=\frac{\pi}{8}$: $x > \cos\frac{\pi}{4}$ und diese Ungleichheit ist für $x=\frac{\pi}{4}$ erfüllt.

IX. ***Sämmtliche Nullstellen von $J^0(x)$ liegen zwischen $(k+\frac{3}{4})\pi$ und $(k+\frac{7}{8})\pi$ und die von $Y^0(x)$ zwischen $(k+\frac{1}{4})\pi$ und $(k+\frac{3}{8})\pi$, wo k alle positiven ganzen Zahlen mit Einschluss der Null zu durchlaufen hat.***

2. Für den Fall $n = 1$ ergiebt sich für $x = k\pi+\varepsilon$ aus

$$J^1(x) = \frac{8x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\omega}\sin(x-\frac{\omega}{2})}{\sin^3\omega}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega,$$

dass J^1 nur für $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ verschwinden kann; der Fall $k = 0$ ist nach den Ergebnissen des ersten Abschnitts auszuschliessen, da für die erste Nullstelle $x > \sqrt{3}$ sein muss; es zeigt sich also jetzt, dass die erste Nullstelle grösser als π ist. Es soll nun gezeigt werden, dass für $\varepsilon < \frac{\pi}{8}$ die Function $(-1)^k J^1$ negativ ist. Für diese Werthe von ε ist

$$(-1)^k \frac{\pi}{8x} J^1 = \int_0^{2\varepsilon} \frac{\sqrt{\cos\omega}\sin(\varepsilon-\frac{\omega}{2})}{\sin^3\omega}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega - \int_{2\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\omega}\sin(\frac{\omega}{2}-\varepsilon)}{\sin^3\omega}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung das erste Integral mit φ_1, das zweite mit ψ_1, so ist

$$\varphi_1 = \int_0^{2\varepsilon} \frac{\sin(\varepsilon-\frac{\omega}{2})}{(2x-\operatorname{tg}\omega)\sqrt{\cos\omega}} \cdot d(\operatorname{cotg}\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}) < \frac{\sin\varepsilon}{(2x-\operatorname{tg}2\varepsilon)\sqrt{\cos 2\varepsilon}} \cdot \operatorname{cotg}2\varepsilon \cdot e^{-2x\operatorname{cotg}2\varepsilon},$$

$$\varphi_1 < \frac{\sin\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}}{(2x-1)\sin 2\varepsilon}\, e^{-2x\operatorname{cotg}2\varepsilon}.$$

Ferner ist

$$\psi_1 > 2\int_{2\varepsilon}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos\omega}}{\sin^3\omega}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\left\{-\cos\left(\frac{\omega}{2}-\varepsilon\right)\right\} > 4\,\frac{\sqrt{\cos 2\varepsilon}\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^3 2\varepsilon}\, e^{-2x\operatorname{cotg}2\varepsilon},$$

wo ω_1 die Wurzel der aus (5.) für $n = 1$ hervorgehenden Gleichung

$$4x - 6\operatorname{tg}\omega + 4x\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^3\omega = 0$$

ist; setzt man $\omega = \frac{5\pi}{12}$, wofür $\operatorname{tg}\omega = 2+\sqrt{2}$ ist, so erkennt man, dass schon für $x > \frac{5}{4}$ die Wurzel $\omega_1 > \frac{5\pi}{12}$ ist.

Nun ist $(-1)^k J^1$ negativ, wenn $\varphi_1 < \psi_1$ ist, also wenn

$$4\cdot(2x-1)\sin^2\left(\frac{\omega_1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right) > \sin\varepsilon\sin^2 2\varepsilon$$

ist, und dies ist sicher erfüllt, wenn

$$8(2x-1)\sin^2\frac{\pi}{24} > \sin\frac{\pi}{8},$$

also bei Benutzung von $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, wenn

$$8(2x-1)\sin\frac{\pi}{24} > 3,$$

und diese Ungleichheit ist, wie man bei Benutzung der ersten beiden Glieder der Sinusreihe erkennt, für $x > 3$ erfüllt. Also erhält man, dass $(-1)^k J^1$ für $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{8}$ negativ und für $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$ positiv ist; also:

X. ***Sämmtliche Nullstellen von*** $J^1(x)$ ***liegen zwischen*** $(k+\frac{1}{8})\pi$ ***und*** $(k+\frac{1}{4})\pi$, ***wo*** k ***alle positiven ganzen Werthe mit Ausschluss der Null annehmen kann.***

Wie aus IX. und X. folgt, kann in dem Intervall für die Nullstellen von J^0 die Function J^1, also auch $\frac{dJ^0}{dx}$ nicht verschwinden; daher liegt in den oben angegebenen Intervallen für J^0 stets nur eine Nullstelle. Damit ist erst der völlige Beweis für die von mir aufgestellte Behauptung erbracht, dass die Differenz zweier Wurzelwerthe von J^0 kleiner als π ist, aber mit wachsendem x gegen π convergirt. Die neueren numerischen Berechnungen*) der ersten 40 Wurzeln von J^0 bestätigen dieses Ergebniss.

Nach der über Y^n gemachten Bemerkung am Schlusse des vorigen Abschnitts folgt sofort, dass $(-1)^k Y^1$ für $\varepsilon \leqq \frac{5}{8}\pi$ negativ und für $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$ positiv ist, wo $x = k\pi + \varepsilon$ ist. Also:

XI. ***Die Nullstellen von*** $Y^1(x)$ ***liegen von der zweiten an zwischen*** $(k+\frac{5}{8})\pi$ ***und*** $(k+\frac{3}{4})\pi$, ***wo*** k ***alle positiven ganzen Werthe mit Ausschluss der Null annehmen kann. Die erste Nullstelle liegt zwischen*** $\frac{\pi}{2}$ ***und*** $\frac{3}{4}\pi$.

3. Für den Fall $n = 2$ hat man:

$$(-1)^k J^2(x) = \frac{32x^2}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}}\omega \sin(\varepsilon - \frac{3}{2}\omega)}{\sin^3\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega;$$

es ist daher $(-1)^k J^2$ positiv für $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$. Im anderen Falle hat man zwei Theilintegrale mit der Zwischengrenze $\frac{2}{3}\varepsilon$; bezeichnet man die absoluten Werthe beider Integrale mit φ_2 und ψ_2, so ist

$$\varphi_2 = \tfrac{2}{5} \int_0^{\frac{2}{3}\varepsilon} \operatorname{cotg}^5\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\frac{\cos(\varepsilon - \frac{5}{2}\omega)}{\cos^{\frac{5}{2}}\omega} < \tfrac{2}{5} \operatorname{cotg}^5 \frac{2\varepsilon}{3}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\varepsilon} - \cos\varepsilon \right\}.$$

Ist $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{2}$, so ist demnach

$$\varphi_2 < \tfrac{2}{5} \frac{\cos^{\frac{7}{2}}\frac{2}{3}\varepsilon}{\sin^{5\frac{2}{3}}\varepsilon} e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\varepsilon},$$

*) ***Willson u. Peirce.*** Bull. of the Amer. Math. Soc. Serie 2, Bd. 3. 1897.

falls $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\varepsilon < \frac{2x}{5}$ oder wenn $x > \frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Ferner ist

$$\psi_2 > \tfrac{2}{3}\int_{\frac{2}{3}\varepsilon}^{\omega_1} \frac{\cos^{\frac{3}{2}}\omega e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}}{\sin^5\omega}\, d\left\{-\cos\left(\tfrac{3}{2}w-\varepsilon\right)\right\} > \tfrac{4}{3}\cdot\frac{\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\varepsilon\cdot\sin^2\left(\frac{3}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^5\frac{2}{3}\varepsilon}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\varepsilon},$$

wo ω_1 die reelle Wurzel von

$$4x-10\operatorname{tg}\omega+4x\operatorname{tg}^2\omega-3\operatorname{tg}^3\omega = 0$$

ist. Also ist $(-1)^k J^2$ negativ für $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{2}$, wenn $\varphi_2-\psi_2$ negativ ist oder wenn

$$10\sin^2\left(\frac{3}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\varepsilon\right) > 0$$

ist. Die linke Seite nimmt mit wachsendem ε ab, also ist $\varphi_2-\psi_2$ negativ, wenn

$$10\sin^2\left(\frac{3}{4}\omega_1-\frac{\pi}{4}\right) > \frac{3}{4}$$

oder wenn

$$\sin\frac{3}{2}\omega_1 < \frac{17}{20}$$

ist. Diese Gleichung ist für $\omega_1 \geqq 81\frac{1}{5}^\circ$ erfüllt und ergiebt für x die Bedingung $x \geqq 5,2$. Von diesem Werthe an liegen die Nullstellen von J^2 zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{4}\pi$ und die von Y^2 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$.

4. Für den Fall $n = 3$ ist

$$(-1)^k J^3(x) = \frac{2^7\cdot x^3}{15\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{5}{2}}\omega\sin\left(\varepsilon-\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin^7\omega}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega.$$

Hier zerfällt das Integral in 3 Theilintegrale mit den Grenzen 0, $\frac{2\varepsilon}{5}$, $\frac{2\varepsilon+2\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{2}$; ist $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$, so fällt das letzte Integral fort. Bezeichnet man in diesem Fall die absoluten Beträge des ersten und zweiten Integrals mit φ_3 und ψ_3, so ist:

$$\varphi_3 = \tfrac{2}{7}\int_0^{\frac{2\varepsilon}{5}} \operatorname{cotg}^7\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{7}{2}\omega\right)}{\cos^{\frac{7}{2}}\omega} < \tfrac{2}{7}\frac{\cos^{\frac{9}{2}}\frac{2}{5}\varepsilon\left(1-\cos\varepsilon\cos^{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}\varepsilon\right)}{\sin^7\frac{2}{5}\varepsilon}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{5}\varepsilon},$$

falls $\operatorname{tg}\frac{2}{5}\varepsilon < \frac{2x}{7}$ ist.

$$\psi_3 = \frac{2}{5}\int_{\frac{2\varepsilon}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{5}{2}}\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}}{\sin^7\omega}\, d\left|-\cos\left(\varepsilon-\tfrac{5}{2}\omega\right)\right| > \frac{4}{5}\cdot\frac{\cos^{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}\varepsilon\cdot\sin^2\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^7\frac{2}{5}\varepsilon}\cdot e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{5}\varepsilon},$$

wo ω_1 die reelle Wurzel der Gleichung

$$4x-14\operatorname{tg}\omega+4x\operatorname{tg}^2\omega-5\operatorname{tg}^3\omega = 0$$

bedeutet; damit $(-1)^k J^3$ negativ sei, ergiebt sich die Bedingung:

$$14\sin^2\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon\right)\left(1-\cos\varepsilon\cos^{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}\varepsilon\right)>0.$$

Wegen der aus Formel XI. resultirenden Gleichung

$$-J^3 = \left(1-\frac{8}{x^2}\right)J^1+\frac{4}{x}J^0$$

hat J^3 für $x>2\sqrt{2}$ das entgegengesetzte Zeichen von J^0 und J^1, wenn diese dasselbe Zeichen haben, also nach den Sätzen IX. und X. für ε zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ und zwar ist dann $(-1)^k J^3$ negativ. Es bleibt also die obige Ungleichung nur für ε zwischen $\frac{3\pi}{4}$ und π zu untersuchen. In diesem Falle ist sie sicher erfüllt, wenn:

$$14\sin^2\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon\right)\left(1+\cos^2\frac{6\pi}{20}\right)>0$$

oder

$$\sqrt{7}\sin\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon\right)\cos\frac{3\pi}{20}>0$$

ist. Wenn ω_1 so gross ist, dass $\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}>\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon$ ist, so ist diese Ungleichheit erfüllt: hat ω_1 kleinere Werthe, so nimmt die linke Seite mit wachsendem ε ab; es ist also $\varphi_3-\psi_3$ negativ, wenn

$$\sqrt{7}\sin\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\pi}{2}\right) > \sqrt{5}\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{20}$$

ist. Wenn $\omega_1>82\frac{4}{5}^\circ$ ist, so ist diese Bedingung erfüllt; aus der Gleichung für $\operatorname{tg}\omega_1$ folgt dann, dass $x>9$ sein muss, während die Bedingungsgleichung $\operatorname{tg}\frac{2}{5}\varepsilon = \frac{2x}{7}$ für $x>10\frac{3}{4}$ erfüllt ist. Von diesem Werthe an liegen die Nullstellen von J^3 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$; die von Y^3 zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{4}\pi$.

5. Multiplicirt man Formel II. für $n=2$:

$$\frac{4}{x}J^2 = J^1+J^3$$

mit $\frac{6}{x}$ und wendet abermals II. an, so folgt:

$$\left(1-\frac{24}{x^2}\right)J^2+\frac{6}{x}J^1=-J^4.$$

Es ist demnach J^4 negativ, wenn $x>2\sqrt{6}$ ist und J^1 und J^2 gleichzeitig positiv sind, d. h. wenn ε zwischen $\frac{3}{4}\pi$ und π liegt.

Aus Formel VIII. folgt

$$5J^2+3J^6=-8\left(1-\frac{30}{x^2}\right)J^4.$$

Nun ist sowohl J^2 als J^6 für ε zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ negativ, sobald $x>\frac{143}{\pi}$ oder $x>14\frac{1}{2}\pi$ ist; demnach ist hierfür J^4 positiv, also liegen die Nullstellen von J^4 von $x>14\frac{1}{2}\pi$ an zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ und die von Y^4 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$.

IV. Die erste Nullstelle von Y^n.

Durch die vorangehenden Sätze ist die ungefähre Lage der höheren Nullstellen von Y^n ermittelt worden; es erübrigt noch wie zuerst für J^n nun auch für Y^n die Lage der ersten Nullstelle ungefähr anzugeben. Es ist:*)

$$(14.)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{2}Y^n(x)=\left\{\Psi(n)-\log\frac{x}{2}\right\}J^n(x)+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p}(x) \\ \qquad\qquad +\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n+p}\right)J^{n+2p}(x), \end{cases}$$

wo Ψ die bekannte *Gauss*sche Transscendente bedeutet. Der Ausdruck rechts besteht aus 3 wesentlich verschiedenen Theilen. Wendet man auf den mittleren Theil die Formel XII. an, so wird

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p}=\frac{1}{2}J^n\sum_{p=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{p-1}(-1)^\lambda\frac{\Pi n\,\Pi(p-\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{p\,\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\,\Pi(n-p)\,\Pi(n-p+\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2p-2\lambda}$$
$$+\frac{1}{2}J^{n+1}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{p-1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\Pi n\,\Pi(p-\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda-1)}{p\,\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\,\Pi(n-p)\,\Pi(n-p+\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2p-2\lambda-1}.$$

Bezeichnet man den Factor von $\frac{1}{2}J^n$ mit H^n, so ist

$$H^n=\sum_{p=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{p}(-1)^{p-\lambda}\frac{\Pi n\,\Pi\lambda\,\Pi(n-p+\lambda)}{p\,\Pi(p-\lambda)\,\Pi(2\lambda-p)\,\Pi(n-p)\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}$$
$$=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\Pi n\,\Pi\lambda}{\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}\sum_{p=\lambda}^{n}(-1)^{p-\lambda}\frac{\Pi(n-p+\lambda)}{p\,\Pi(p-\lambda)\,\Pi(2\lambda-p)\,\Pi(n-p)}.$$

---

*) Siehe z. B. Programm des Sophien-Realgymn. Berlin 1895. Es findet sich dort das Versehen, dass $\Psi(0)$ statt $\Psi(n)$ steht.

Bezeichnet man die Summe mit $\varphi(n, \lambda)$, so ist

$$\varphi(n, \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{(p+\lambda)\Pi p\, \Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p)}.$$

Als obere Grenze kann ∞ gewählt werden, da die Summe von selbst abbricht. Hieraus folgt

$$n\varphi(n, \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{(p+\lambda)\Pi p\, \Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p-1)} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{\Pi p\, \Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p)}$$

$$(n+\lambda)\varphi(n-1, \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{(p+\lambda)\Pi p\, \Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p-1)} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n-p-1)}{\Pi p \Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p-1)},$$

also:

$$(15.) \quad n\varphi(n, \lambda) - (n+\lambda)\varphi(n-1, \lambda) = \lambda \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n-p-1)}{\Pi p\, \Pi(\lambda-p)\, \Pi(n-\lambda-p)}.$$

Vertauscht man in der zweiten Summe von $(n+\lambda)\varphi(n-1, \lambda)$ den Summationsbuchstaben p mit $p-1$, so erhält man:

$$(16.) \quad n\varphi(n, \lambda) - (n+\lambda)\varphi(n-1, \lambda) = (\lambda+1) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{\Pi p\, \Pi(\lambda-p+1)\Pi(n-\lambda-p)}.$$

Die Summe auf der rechten Seite von (16.) geht in die in (15.) über, wenn $n-1$ und $\lambda-1$ an Stelle von n und λ tritt; die Summen bleiben also bei dieser Substitution ungeändert. Man kann daher in (15.) für λ Eins setzen, wenn man gleichzeitig $n-\lambda+1$ an Stelle von n setzt; dann aber reducirt sich die Summe auf ihre beiden ersten Glieder, die zusammen Null ergeben, somit ist

$$n\varphi(n, \lambda) - (n+\lambda)\varphi(n-1, \lambda) = 0$$

$$\varphi(n, \lambda) = \frac{(n+\lambda)(n+\lambda-1)\cdots(2\lambda+1)}{n(n-1)\cdots(\lambda+1)}\varphi(\lambda, \lambda).$$

Nun ergiebt sich aus der Definition von $\varphi(n, \lambda)$, dass

$$\varphi(\lambda, \lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

ist, also hat man

$$\varphi(n, \lambda) = \frac{\Pi(n+\lambda)\, \Pi(\lambda-1)}{\Pi n\, \Pi 2\lambda},$$

und demnach erhält man

$$H^n = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\Pi(\lambda-1)\, \Pi\lambda\, \Pi(n+\lambda)}{\Pi 2\lambda\, \Pi(n-\lambda)} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}.$$

Ganz ebenso lässt sich der Factor von J^{n+1} umformen und es

ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^n \frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p} = \tfrac{1}{2}J^n \sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}$$
$$-\tfrac{1}{2}J^{n+1}\sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda-1}.$$

Hieraus folgt bei Benutzung der Formel V:

$$(17.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\sum_1^n \frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p} = \tfrac{1}{4}J^n \sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda} \\ \qquad + \tfrac{1}{2}\frac{dJ^n}{dx}\sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda-1}. \end{cases}$$

Aus diesem Werthe erkennt man, dass der mittlere Theil in (14.) für solche Werthe von x, wofür J^n und $\frac{dJ^n}{dx}$ positiv sind, auch positiv ist. Wählt man x kleiner als die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$, so sind nach den Sätzen des ersten Abschnitts alle J^{n+p} und $\frac{dJ^{n+p}}{dx}(p \gtreqless 0)$ positiv und es nimmt J^{n+p} mit wachsendem p nach Formel III. ab. In diesem Fall ist der dritte Theil von (14.) sicher negativ; es lässt sich für den absoluten Betrag dieses Theils eine obere Grenze angeben. Man betrachte zunächst den Theil $\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p}$ und fasse je zwei auf einander folgende Glieder zusammen, so erhält man eine Reihe mit lauter negativen Gliedern, deren absoluter Betrag $\frac{1}{p}J^{n+2p} - \frac{1}{p+1}J^{n+2p+2}$ ist, und diese Differenz ist kleiner als $\frac{1}{p(p+1)}J^n$, wenn $x \leqq n+1$ ist. Man hat nämlich

$$J^{n+2p} - J^{n+2p+2} = 2\frac{dJ^{n+2p+1}}{dx},$$
$$J^{n+2p-2} - J^{n+2p} = 2\frac{dJ^{n+2p-1}}{dx}.$$

Ferner erhält man durch Differentiation von Formel III.:

$$2\frac{d^2J^{n+2p}}{dx^2} = \frac{dJ^{n+2p-1}}{dx} - \frac{dJ^{n+2p+1}}{dx}.$$

Da für die angegebenen Werthe von x alle in diesen Formeln auftretenden Functionen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen positiv sind, so ergiebt sich aus den drei letzten Gleichungen:

$$J^{n+2p-2} - J^{n+2p} > J^{n+2p} - J^{n+2p+2},$$

also erst recht

$$J^{n+2p-4} - J^{n+2p-2} > J^{n+2p} - J^{n+2p+2},$$

und so fort, schliesslich

$$J^n - J^{n+2} > J^{n+2p} - J^{n+2p+2},$$

vorausgesetzt, dass $\frac{d^2 J^{n+2}}{dx^2}$ positiv ist, und dies ist nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes für $x \leqq n+1$ erfüllt. Durch Addition der Ungleichheiten ergiebt sich

$$J^n - J^{n+2p} > p(J^{n+2p} - J^{n+2p+2})$$

oder

$$J^n > (p+1)J^{n+2p} - pJ^{n+2p+2}$$

und diese Ungleichheit ergiebt, durch $p(p+1)$ dividirt, die Behauptung.

Nun ist

$$-\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p} = \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{2p+1} J^{n+4p+2} - \frac{1}{2p+2} J^{n+4p+4} \right\},$$

und diese Summe ist wegen der eben bewiesenen Ungleichung kleiner als $J^n \sum_0^\infty \frac{1}{(2p+1)(2p+2)}$ und dies ist $J^n \log 2$; also ist

$$(18.) \qquad -\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p} < J^n \log 2.$$

Auch der Theil $\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p}$ ist negativ; trennt man den ersten Summanden ab, so ist der Rest positiv; folglich ist

$$-\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p} < \frac{1}{n+1} J^{n+2},$$

und bei Benutzung von Formel X.:

$$(19.) \quad -\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p} < \frac{1}{n+1}\left\{\frac{2n(n+1)}{x^2} - 1\right\} J^n - \frac{2}{x}\frac{dJ^n}{dx} < \left(\frac{2n}{x^2} - \frac{1}{n+1}\right) J^n.$$

Nach einer bekannten *Gauss*schen Formel*) ist:

$$(20.) \qquad \Psi(n) > \log(n+\tfrac{1}{2});$$

setzt man nun in (14.) $x = n+\frac{1}{2}$, so folgt aus (18.) und (20.):

$$\left\{\Psi(n) - \log\frac{x}{2}\right\} J^n + \sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p} > 0.$$

Berücksichtigt man in (17.) nur den ersten Summanden der ersten Summe,

*) Werke Bd. 3 S. 154. Formel 66.

so folgt mit Hülfe von (19.):

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^n \frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p} + \sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p} > \left(\frac{n}{x^2} - \frac{2n}{x^2} + \frac{1}{n+1}\right) J^n$$

$$> \left(\frac{1}{n+1} - \frac{n}{x^2}\right) J^n,$$

und diese Differenz ist für $x = n+\frac{1}{2}$ positiv. Aus den letzten Ungleichheiten ergiebt sich, dass $Y^n(x)$ für $x = n+\frac{1}{2}$ positiv ist.

Für die erste Nullstelle von J^n folgt aus Formel XIII., dass Y^n negativ ist. Da für sehr kleine Werthe von x, wie aus (14.) folgt, Y^n positiv ist, so liegt die erste Nullstelle von Y^n vor der von J^n. Für die zweite Nullstelle von Y^n ist $\frac{dY^n}{dx}$ positiv, also folgt aus XIII., dass hierfür J^n negativ ist; es liegt die zweite Nullstelle von Y^n hinter der von J^n.

Die erste Nullstelle von J^n ist grösser als $n+\frac{1}{2}$; da Y^n für $x = n+\frac{1}{2}$ positiv ist, so ist es vorher noch gar nicht oder mindestens zwei Mal schon Null gewesen. Das letztere ist nach dem eben über die zweite Nullstelle von Y^n bewiesenen Satze unmöglich: *die erste Nullstelle von $Y^n(x)$ liegt nach $x = n+\frac{1}{2}$.*

Weitere Ergebnisse über die Lage der Nullstellen hoffe ich in Kürze nachfolgen lassen zu können. Der Minimalwerth von x, von dem an die Sätze des zweiten Abschnittes Geltung haben, lässt sich wesentlich herabsetzen und über die gegenseitige Lage der ersten Nullstelle von Y^n und seiner Ableitungen lassen sich ähnliche Betrachtungen wie für J^n anstellen.

Ueber die singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit n abhängigen Variablen.

(Von Herrn *M. Hamburger* in Berlin.)

Im 121. Bande dieses Journals S. 265*) sind die singulären Lösungen einer einzigen algebraischen Differentialgleichung n-ter Ordnung, soweit sie die ersten Integrale derselben betreffen, behandelt worden. Wiewohl die Differentialgleichungssysteme mit n abhängigen Variablen stets auf eine einzige Differentialgleichung n-ter Ordnung zurückgeführt werden können, so schien es doch von Interesse, die Frage nach den singulären Lösungen der ersteren Systeme, ohne Hülfe dieser Reduction zu untersuchen. Die Entwickelungen geschehen nach der gleichen Methode, die in der angeführten Abhandlung angewandt ist, und zwar wird zuerst von den Differentialgleichungen, dann von den vollständigen Integralen ausgegangen. Die Ergebnisse stimmen in beiden Betrachtungen überein. Die Frage nach den singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung hat Herr *Picard* in seinem Traité d'Analyse t. III, p. 52ff. behandelt, sich jedoch auf den Fall beschränkt, dass die darin auftretende Irrationalität durch eine Quadratwurzel darstellbar ist. Ein Kriterium dafür, ob die durch Nullsetzung des Radicanden erhaltene Gleichung, falls sie mit dem Differentialgleichungssystem verträglich ist, ein singuläres oder particuläres Integral darstellt, findet sich a. a. O. nicht angegeben. Das dort eingeschlagene Verfahren, aus dem nicht ersichtlich ist, wie es auf den Fall einer beliebigen algebraischen Irrationalität auszudehnen sei, ist von dem hier befolgten

*) Es sei mir gestattet, bei dieser Gelegenheit einige Berichtigungen zu der genannten Abhandlung anzumerken.

S. 266, Zeile 9 von unten lies abhängigen statt unabhängigen Variablen, S. 269, Zeile 4 von unten lies η_0 statt σ_0.

wesentlich verschieden. Dieses beruht, wie in der zu Anfang angeführten Arbeit, auf der Erweiterung der von Herrn *Fuchs**) eingeführten Methode der Zerlegung der Discriminante einer Differentialgleichung in ihre linearen Theiler auf Systeme von Differentialgleichungen.

I.

Wir betrachten das System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(A.) \qquad f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die f ganze rationale Functionen der eingeschlossenen Argumente bedeuten. Durch Einführung von

$$z = u_1 \frac{dy_1}{dx} + u_2 \frac{dy_2}{dx} + \cdots + u_n \frac{dy_n}{dx},$$

wo $u_1, \ldots, u_n$ unbestimmte Grössen bedeuten, können die vorstehenden Differentialgleichungen nach einem bekannten Satze durch das System

$$(1.) \qquad \frac{dy_i}{dx} = R_i(x, y_1 \ldots y_n, z), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ersetzt werden, wo die R_i rationale Functionen von $x, y_1, \ldots, y_n, z$ bedeuten und z durch eine algebraische Gleichung

$$(2.) \qquad f(x, y_1 \ldots y_n, z) = 0$$

definirt ist. Die Function f sei vom m-ten Grade in z mit Coefficienten, die in $x, y_1, \ldots, y_n$ rational und ohne gemeinsamen Theiler sind. Die Gleichung $f = 0$ wird in dem Sinne irreductibel vorausgesetzt, dass sie nicht in Gleichungen niedrigeren Grades in Bezug auf z mit Coefficienten gleicher Beschaffenheit zerlegbar sei. Im Falle der Reductibilität von (2.) würden so viele Systeme (1.) zu betrachten sein, als es irreductible Factoren von f giebt.

Durch Elimination von z aus den Gleichungen

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z)}{\partial z} = 0$$

$$\ldots$$

gehe die Discriminantengleichung

$$(3.) \qquad \Delta(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0^{**})$$

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884, Bd. 32, S. 699ff.

**) Zur Discriminantengleichung kann man auch unmittelbar von den Gleichungen

hervor, welche die Bedingung dafür liefert, dass mehrere Wurzeln z der Gleichung (2.) einander gleich werden. $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ sei eine Wurzel der Gleichung (3.). Wir können für die Variablen $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ Bereiche festsetzen, in denen η endlich und stetig bleibt und sich nicht verzweigt. Ist $x_0, y_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n-1,0}$ ein willkürliches Werthsystem innerhalb eines solchen Bereiches, so lässt sich in der Umgebung desselben η in eine convergente nach ganzen positiven Potenzen von

$$x-x_0,\ y-y_0,\ y_1-y_{1,0},\ \ldots,\ y_{n-1}-y_{n-1,0}$$

fortschreitende Reihe entwickeln. Setzt man diese Reihe η in die Gleichung (2.) für y_n ein, so werden durch die Gleichung

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta, z) = 0$$

m Functionen z von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ definirt, von denen mehrere mit einander zusammenfallen werden. Es mögen nun p Wurzeln dieser Gleichung in z gleich ζ werden, wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen ist, dass ζ nicht identisch, d. h. für beliebige Werthe von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ unendlich sei; im anderen Falle brauchte man nur $z' = \frac{1}{z}$ statt z einzuführen. Es giebt dann p Functionen z, die die Gleichung (2.) befriedigen und für $y_n = \eta$ in den gemeinsamen Werth ζ übergehen. Diese Functionen z werden im allgemeinen in Gruppen von zusammenhängenden Zweigen zerfallen und eine Gruppe von $\alpha(\leqq \beta)$ Zweigen wird die Darstellung haben*):

$$(4.) \qquad z-\zeta = g_0(y_n-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1(y_n-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo $\varkappa$ und α von Null verschiedene positive ganze Zahlen bedeuten. Denkt man sich das willkürliche Werthsystem $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n-1,0}$ so gewählt, dass ζ für dasselbe nicht unendlich wird, so sind $\zeta, g_0, g_1, \ldots$, ebenso wie η durch Reihen darstellbar, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$,

---

(A.) aus gelangen, indem man aus den $n+1$ Gleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots,\ f_n = 0,\ \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial \frac{dy_1}{dx}},\ \frac{\partial f_2}{\partial \frac{dy_2}{dx}}\ \cdots\ \frac{\partial fn}{\partial \frac{dy}{dx_n}} = 0$$

die Ableitungen $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ eliminirt. Das Eliminationsresultat liefert die Gleichung $\Delta = 0$.

*) Vergl. *Fuchs,* Berl. Ber. 1884, S. 701 ff.

$y_1-y_{10}, \ldots, y_{n-1}-y_{n-1,0}$ fortschreiten, und in der Umgebung von $x_0, y_{10} \ldots y_{n-1,0}$ convergiren. Da $\frac{\varkappa}{\alpha}$ als Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n-\eta$ in der Entwickelung (4.) angenommen ist, so darf g_0 nicht identisch verschwinden. Durch Einsetzen der Reihe für z in das Gleichungssystem (1.) erhält man, indem man noch $y_n = \eta+u^\alpha$ setzt

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta+u^\alpha, \zeta+g_0u^\varkappa+g_1u^{\varkappa+1}+\cdots) & (i=1,2,\ldots,n-1) \\ \dfrac{d(y_n-\eta)}{dx} = \alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx} = R_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta+u^\alpha, \zeta+g_0u^\varkappa+\cdots) - \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \\ \qquad\qquad - \sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta+u^\alpha, \zeta+g_0u^\varkappa+\cdots). \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst an, dass keine der rationalen Functionen $R_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, z)$ $i = 1, 2 \ldots n$ für $y = \eta$, $z = \zeta$ unendlich wird, dann erhält man folgende Entwickelungen

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(\eta, \zeta)+\alpha_iu+\beta_iu^2+\cdots, & (i=1,2,\ldots,n-1) \\ \alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx} = R_n(\eta, \zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2+\cdots, \end{cases}$$

wo zu zur Abkürzung $R(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, \eta, \zeta) = R(\eta, \zeta)$ und

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i(\eta, \zeta) = \sigma$$

gesetzt ist.

Für die weitere Behandlung ist es wesentlich zu unterscheiden, ob $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ein Integral des Systems (1.) ist oder nicht. Im ersten Falle muss $R_n(\eta, \zeta) = \frac{\partial\eta}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i(\eta, \zeta)$, also $R_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta, \zeta)-\sigma$ identisch gleich Null sein, wenn ζ einer der Werthe ist, in den z für $y_n = \eta$ übergeht.

Wir nehmen zunächst an, dass $y_n = \eta$ kein Integral des Systems (1.) sei, also $R_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta, \zeta)-\sigma$ nicht identisch verschwinde, und denken uns das willkürliche Werthsystem $x_0, y_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n-1,0}$, für welches η in η_0 und ζ in ζ_0 übergehe, so gewählt, dass auch für dieses $R_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, \eta, \zeta)-\sigma$ von Null verschieden ist, dann erhalten wir aus (6.), indem u als unabhängige Variable eingeführt wird, folgendes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{dn}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}}{R_n(\eta, \zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2}, \\ \dfrac{dy_i}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}\{R_i(\eta, \zeta)+\alpha_iu+\beta_iu^2+\cdots\}}{R_n(\eta, \zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2+\cdots} & (i=1,2,\ldots,n-1) \end{cases}$$

durch welches die n Variablen $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ als Functionen von u bestimmt werden. Die rechten Seiten stellen nach den gemachten Voraussetzungen Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, u$ dar, die für $x = x_0$, $y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$, $u = 0$ endlich sind und in der Umgebung dieses Werthsystems in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$, $y_1 - y_{1,0}$, $y_2 - y_{2,0}, \ldots$, $y_{n-1} - y_{n-1,0}$ und u entwickelt werden können. Die den Differentialgleichungen (7.) genügenden Functionen x, y_1, $y_2, \ldots, y_{n-1}$, die für $u = 0$ bez. die Werthe x_0, y_{10}, $y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}$ annehmen, lassen sich daher in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von u darstellen, die die Form erhalten

$$(8.)\quad \begin{cases} x - x_0 = \dfrac{1}{R_{n,0} - \sigma_0} u^\alpha + \beta u^{\alpha+1} + \cdots, \\ y_i - y_{i0} = \dfrac{R_{i_0}}{R_{n,0} - \sigma_0} u^\alpha + \gamma_i u^{\alpha+1} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{cases}$$

wo der Index 0 bei σ, R_n und R_i, wie überall im Folgenden, bedeutet, dass in den mit ihm behafteten Grössen

$$x = x_0, \quad y_1 = y_{10}, \quad y_2 = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y_{n-1,0}$$

und somit $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$ zu setzen ist. Durch Umkehrung der ersten der Gleichungen (8.) entsteht

$$u = (y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}} = (R_{n,0} - \sigma_0)^{\frac{1}{\alpha}} (x - x_0)^{\frac{1}{\alpha}} + \delta (x - x_0)^{\frac{2}{\alpha}}$$

und hieraus

$$(9.)\quad \begin{cases} y_n - \eta = (R_{n,0} - \sigma_0)(x - x_0) + \varepsilon_1 (x - x_0)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_2 (x - x_0)^{1+\frac{2}{\alpha}} + \cdots \\ y_i - y_0 = R_{i,0}(x - x_0) + a_i (x - x_0)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Betrachtet man $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ als Coordinaten eines Punktes im $(n+1)$-dimensionalen Raume, so stellen die Gleichungen (9.) eine Gruppe von α-Zweigen einer Integralcurve des Systems (1.) dar, die dadurch bestimmt ist, dass sie durch den Punkt $x = x_0$, $y_1 = y_{10}, \ldots y_{n-1} = y_{n-1,0}$, $y_n = \eta_0$ hindurchgeht. Die Zweige berühren sich sämmtlich in diesem Punkte, da in ihm die Ableitungen $\frac{dy_i}{dx}$ für alle Zweige denselben Werth haben. Es ist nämlich für $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\left(\frac{dy_i}{dx}\right)^0 = R_{i,0}$ und $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0} + R_{n,0} - \sigma_0 = R_{n,0}$ für alle Zweige.

Die Gleichung $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ stellt in dem gedachten Raume eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit dar, die den Punkt $x = x_0$, $y_1 = y_{1,0}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$, $y_n = \eta_0$ enthält. Keine der durch diesen Punkt gehenden Curven, die

in der Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ verläuft, berührt die durch den nämlichen Punkt gehenden Zweige der Integralcurve. Denn wählt man die Curve auf der Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ so, dass $\left(\frac{dy_i}{dx}\right)_0 = R_{i,0}$, für $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dann wird

$$\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0} = \sigma_0,$$

also in dem vorliegenden Falle wesentlich verschieden von $R_{n,0}$, dem Werthe von $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0$ in den Zweigen der Integralcurve.

Ist also $y_n = \eta$ kein Integral des Systems (1.), so ist die Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ der Ort für die Punkte, durch welche Gruppen von einander berührenden Zweigen der Integralcurven des Systems (1.) hindurchgehen, die aber von keiner auf der Mannigfaltigkeit verlaufenden Curven in dem Schnittpunkte berührt werden. Die Entwickelung von $y_n - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ beginnt mit der ersten Potenz.

Die Gültigkeit dieser Sätze setzt *willkürliche* Werthe von x_0, $y_{1,0}$, $y_{2,0}, \ldots, y_{n-1,0}$ voraus, sie erleidet eine Ausnahme, wenn $R_{n0} = \sigma_0$ ist oder einige der $R_{i,0} (i = 1, 2, \ldots, n)$ unendlich werden, was nach unserer Annahme gewisse Bedingungsgleichungen zwischen den genannten Anfangswerthen erfordert.

Wir gehen jetzt zu der Betrachtung des Falles über, dass $y_n = \eta$ ein Integral des Differentialgleichungssystems (1.) ist und behalten die Annahme bei, dass keine der n Functionen $R_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, z)$ für $y_n = \eta, z = \zeta$ unendlich werde. Da jetzt $R_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta, \zeta) - \sigma$ identisch gleich Null ist, so erhält man aus (6.) die Entwickelungen

$$(10.) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(\eta, \zeta) + \alpha_i u + \beta_i u^2 + \cdots & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \alpha u^{\alpha-1} \dfrac{du}{dx} = h_\mu u^\mu + h_{\mu+1} u^{\mu+1} + \cdots, \end{cases}$$

wo h_μ als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt wird. Hier sind zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

1. $\mu < \alpha$.

Dieser Fall kann, da μ und α von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind, nur eintreten, wenn $\alpha > 1$ ist. Es gelten dann die Darstellungen

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-\mu-1}}{h_\mu + h_{\mu+1} u + \cdots},$$

$$\frac{dy_i}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-\mu-1}}{h_\mu + h_{\mu+1} u + \cdots} \{R_i(\eta, \zeta) + \alpha_i u + \beta_i u^2 + \cdots\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Wählt man das willkürliche Werthsystem $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}$ in dem Eindeutigkeitsbereich von η so, dass für dasselbe h_μ nicht verschwindet, so lassen sich die

rechten Seiten des vorstehenden Differentialgleichungssystems in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, y_1-y_{10}, …, $y_{n-1}-y_{n-1,0}$ und u entwickeln und die Integrale desselben, die für $u=0$ bez. die Werthe x_0, y_{10}, $y_{2,0}$, …, $y_{n-1,0}$ annehmen, lassen sich daher in Reihen nach ganzen posiven Potenzen von u darstellen, die die Form erhalten:

$$x-x_0=\frac{\alpha}{(\alpha-\mu)h_{\mu,0}}u^{\alpha-\mu}+bu^{\alpha-\mu+1}+\cdots,$$

$$y_i-y_{i0}=\frac{\alpha}{(\alpha-\mu)h_{\mu,0}}\cdot R_{i,0}u^{\alpha-\mu}+cu^{\alpha-\mu+1}+\cdots \qquad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Durch Umkehrung der ersten Gleichung ergiebt sich

$$u=(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{\alpha-\mu}{\alpha}\cdot h_{\mu,0}\right)^{\frac{1}{\alpha-\mu}}(x-x_0)^{\frac{1}{\alpha-\mu}}+\beta(x-x_0)^{\frac{2}{\alpha-\mu}}$$

und durch Erhebung in die α-te Potenz

$$(11.)\quad\begin{cases} y_n-\eta=\left(\frac{\alpha-\mu}{\alpha}h_{\mu,0}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\mu}}(x-x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-\mu}}+\beta(x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-\mu}}+\cdots, \\ y_i-y_0=R_{i,0}(x-x_0)+\gamma(x-x_0)^{1+\frac{1}{\alpha-\mu}}+\cdots \qquad (i=1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen wird eine Gruppe von $\alpha-\mu$ im Punkte $x=x_0$, $y_1=y_{1,0}$, …, $y_{n-1}=y_{n-1,0}$, $y_n=\eta_0$ zusammenhängenden Zweigen einer Integralcurve von (1.) dargestellt, die sich in demselben Punkte, falls $\alpha-\mu>1$ ist, berühren. Denn für alle Zweige ist

$$\left(\frac{dy_i}{dx}\right)_0=R_{i,0}(i=1,2,\ldots,n-1),\quad \left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0=\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0R_{i,0}=\sigma_0.$$

Aber jeder dieser Zweige hat in dem gedachten Punkte auch eine Berührung mit der Mannigfaltigkeit $y_n=\eta$. Denn bestimmt man auf ihr die Richtung eines Linienelements im Durchgangspunkte durch die Bedingungen $\left(\frac{dy_i}{dx}\right)_0=R_{i,0}$ für $i=1,2,\ldots,n-1$, so wird $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0=\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0R_{i,0}=\sigma_0$, gleich dem Werthe von $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0$ in den Zweigen der Integralcurve. Da dies für jeden willkürlichen Punkt $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, …, $y_{n-1}=y_{n-1,0}$, $y_n=\eta_0$ auf der Mannigfaltigkeit $y_n=\eta$ gilt, so können wir sagen, dass der Ort $y_n=\eta$ eine Enveloppe der Integralcurven des Systems (1.) ist, und wir nennen in diesem Falle $y_n=\eta$ ein singuläres Integral des Systems (1.), welche Bezeichnung im folgenden Abschnitt gerechtfertigt wird. Ist $\mu=\alpha-1$, so reducirt sich die Anzahl der Zweige der aus der Entwickelung (4.) hervorgehenden Integralcurve auf 1, und der Ort $y_n=\eta$ bildet für die Integralcurve, die von ihm daselbst berührt wird, keinen Verzweigungspunkt. Den

entsprechenden Complex der Integralcurven, die eine Enveloppe je einer Schar der particulären Integralcurven bilden, erhält man durch Einsetzen von $y_n = \eta(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ in die $n-1$ ersten Differentialgleichungen des Systems (1.) und Integration derselben; die letztere ergiebt $y_1, \ldots, y_{n-1}$ als Function von x mit $n-1$ willkürlichen Constanten, die im Verein mit $y_n = \eta$ den erwähnten Complex darstellen.

Charakteristisch für den betrachteten Fall ist, dass in der Entwickelung von $y_n - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ der Exponent der niedrigsten Potenz *grösser* als Eins ist.

Die aufgestellten Sätze erleiden eine Ausnahme, wenn das willkürliche Werthsystem $x = x_0$, $y_1 = y_{10}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$ so gewählt wird, dass einer der Ausdrücke $R_i(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}\eta_0, \zeta_0)$ unendlich wird, oder $h_{\mu,0}$ verschwindet, wodurch Continuen $(n-1)$-ter Dimension in der n-fachen Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ ausgeschlossen werden.

2. $$\mu > \alpha - 1.$$

In diesem Falle ist nach (10.)

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(\eta, \zeta) + \alpha_i u + \beta_i u^2 + \cdots, & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{h_\mu}{\alpha} u^{\mu-\alpha+1} + \dfrac{h_{\mu+1}}{\alpha} u^{\mu-\alpha+2} + \cdots. \end{cases}$$

Die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen sind holomorphe Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, u$ in der Umgebung des Werthsystems $x = x_0, y_1 = y_{1,0} \ldots y_{n-1} = y_{n-1,0}, u = 0$, in der Voraussetzung, dass $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}$ willkürlich angenommen sind. Es giebt also ein den Gleichungen (12.) genügendes System von Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, u$, die nach ganzen positven Potenzen von $x - x_0$ fortschreiten und für $x = x_0$ beziehlich die Werthe $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}, 0$ annehmen. Die Einsetzung dieser Reihen ergiebt die Integrale in der Form

$$u = 0,$$
$$y_i - y_{i,0} = R_{i,0}(x - x_0) + a_i(x - x_0)^2 + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und da $u = (y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}}$, so ergiebt sich daraus, dass $y_n = \eta$ *particuläres* Integral des Systems (1.) ist. Ausserdem kann die Gleichung $y_n = \eta$ zugleich ein singuläres Integral sein, wenn es Zweige von z als algebraischer Function von y_n giebt, für welche ebenfalls $\sigma = R_n$ und in der entsprechenden Entwickelung von $\alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx}$ in (10.) $\mu < \alpha$ ist.

Charakteristisch für das particuläre Integral ist, dass eine oder mehrere der Entwickelungen von $y_n-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ sich auf $y_n-\eta=0$ reduciren.

Es ist nun der bisher ausgeschlossene Fall zu betrachten, dass einige der Functionen $R_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \eta, \zeta)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ unendlich werden. Es mögen dann die rechten Seiten von (6.), nach ganzen Potenzen von u entwickelt, die folgende Gestalt annehmen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i = g_i u^{-\lambda_i} + h_i u^{-\lambda_i+1} + \cdots, & (i=1,2,\ldots,n-1) \\ \dfrac{d(y_n-\eta)}{dx} = \alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx} = R_n - \dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i = g u^{-\lambda} + h u^{-\lambda+1} + \cdots, \end{cases}$$

wo die Coefficienten $g_i, h_i, \ldots, g, h \ldots$ holomorphe Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ in der Umgebung von $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, $y_{n-1}=y_{n-1,0}$ bedeuten und die g_i und g nicht identisch verschwinden. Der jetzigen Voraussetzung nach ist mindestens eine der Zahlen $\lambda_i (i=1, 2, \ldots, n-1)$ und λ positiv. Wir unterscheiden hier folgende zwei Hauptfälle:

1. $\lambda_i < \lambda+\alpha$ für $i=1, 2, \ldots, n-1$.

Hier muss $\lambda+\alpha$ positiv sein, denn sonst würden, da $\alpha \geqq 1$, sämmtliche λ_i und λ negativ sein, gegen die Voraussetzung. Aus (13.) folgt

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \dfrac{\alpha u^{\lambda+\alpha-1}}{g+hu+\cdots}, \\ \dfrac{dy_i}{du} = \dfrac{\alpha u^{\lambda+\alpha-\lambda_i-1}(g_i+h_i u+\cdots)}{g+hu+\cdots} & (i=1,2,\ldots,n-1). \end{cases}$$

Indem wir annehmen, dass g auch für $x=x_0, y_1=y_{1,0}, \ldots, y_{n-1}=y_{n-1,0}$ nicht verschwindet, stellen die rechten Seiten der vorstehenden Differentialgleichungen Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, u$ dar, die in der Umgebung von $x=x_0, y_1=y_{10}, \ldots, y_{n-1}=y_{n-1,0}, u=0$ holomorph sind. Die Lösungen der Gleichungen (14.), die für $u=0$ beziehlich in $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}$ übergehen, haben daher die Form

$$(15.)\quad \begin{cases} x-x_0 = \dfrac{\alpha}{(\lambda+\alpha)g_0}u^{\lambda+\alpha} + bu^{\lambda+\alpha+1}, \\ y_i-y_{i,0} = \dfrac{\alpha}{\lambda+\alpha-\lambda_i}\left(\dfrac{g_i}{g}\right)u^{\lambda+\alpha-\lambda_i} + c_i u^{\lambda+\alpha-\lambda_i+1}. \end{cases}$$

Aus der ersten der vorstehenden Gleichungen folgt durch Umkehrung

$$u = \left(\frac{(\lambda+\alpha)g_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\lambda+\alpha}}(x-x_0)^{\frac{1}{\lambda+\alpha}} + \gamma(x-x_0)^{\frac{2}{\lambda+\alpha}} + \cdots$$

und hieraus

$$(16.)\quad \begin{cases} y_n-\eta = u^{\alpha} = \left(\dfrac{(\lambda+\alpha)g_0}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}}(x-x_0)^{\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}} + \delta(x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{\lambda+\alpha}} + \cdots \\ y_i-y_{i,0} = \dfrac{\alpha}{\lambda+\alpha-\lambda_i}\left(\dfrac{g_i}{g}\right)_0\left(\dfrac{\lambda+\alpha}{\alpha}g_0\right)^{\frac{\lambda+\alpha-\lambda_i}{\lambda+\alpha}}(x-x_0)^{\frac{\lambda+\alpha-\lambda_i}{\lambda+\alpha}} + \varepsilon(x-x)^{\frac{\lambda+\alpha-\lambda_i+1}{\lambda+\alpha}} + \cdots \end{cases}$$

Ist nun $\lambda \gtreqless 0$, so ist $y_n = \eta$ ***kein*** Integral des Systems (1.), denn da $u^{-\lambda}$ die Anfangspotenz von u in der Entwickelung der rechten Seite der letzten Gleichung von (5.) ist, so wird diese für $u=0$ im ersten Falle unendlich, im zweiten Falle $= g_0$, also in beiden Fällen $R_n - \sigma$ von Null verschieden.

Aus (16.) folgt, dass der Exponent der Anfangspotenz in der Entwickelung von $y_n - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ nicht grösser als Eins ist.

Ist dagegen λ negativ, dann ist, da $R_n - \sigma = 0$ ist, $y_n = \eta$ ein Integral. Da in dem hier betrachteten Hauptfall $\lambda+\alpha$ positiv ist, so ist $\dfrac{\alpha}{\lambda+\alpha} > 1$. Bestimmt man nun in der Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ die Richtung eines durch den Punkt $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}, \eta$ gehenden Linienelements durch die Bedingung, dass $\left(\dfrac{dy_i}{dx}\right)_0 = R_{i,0} (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — wobei einige der Werthe unendlich sein können —, dann wird $\left(\dfrac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0}$ gleich dem Werthe von $\left(\dfrac{dy_n}{dx}\right)_0$ in der Integralcurve, wie aus (16.) hervorgeht. Der Ort $y_n = \eta$ ist daher eine Enveloppe der Integralcurve des Systems (1.) oder ein singuläres Integral. Charakteristisch ist dafür, dass wiederum wie in (11.) der Exponent der Anfangspotenz von $y_n - \eta$ in der Entwickelung nach Potenzen von $x - x_0$ grösser als 1 ist.

2. $\lambda_i \gtreqless \lambda+\alpha$ für mindestens einen der Indices i.

Hier wird es eine Zahl $\lambda_\varkappa$ geben, die nicht kleiner als die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\varkappa-1}, \lambda_{\varkappa+1}, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda+\alpha$ ist. Diese Zahl $\lambda_\varkappa$ muss positiv sein, da sonst sämmtliche λ_i und λ Null oder negativ sein müssten gegen die Voraussetzung, dass mindestens eine der Zahlen λ_i und λ positiv sei. In diesem Falle ist $y_n = \eta$ ein Integral des Systems (1.), wie man erkennt, wenn man $y_\varkappa$ als unabhängige Variable einführt, denn dann wird nach (13.)

$$\frac{d(y_n-\eta)}{dy_\varkappa} = \frac{R_n - \dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\eta}{\partial y_1}R_1 - \cdots - \dfrac{\partial\eta}{\partial y_{n+1}}R_{n-1}}{R_\varkappa} = \frac{g}{g_\varkappa}u^{\lambda_\varkappa-\lambda}\mathfrak{P}(u),$$

wo $\mathfrak{P}(u)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitende Reihe

bedeutet. Da $\lambda_\varkappa - \lambda$ hier > 0 ist, so verschwindet $\frac{d(y_n - \eta)}{dy_\varkappa}$ mit u, also auch mit $y_n - \eta$. Aus (13.) folgt ferner

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy_\varkappa} = \dfrac{u^{\lambda_\varkappa}}{g_\varkappa + h_\varkappa u + \cdots}, \quad \dfrac{dy_i}{dy_\varkappa} = u^{\lambda_\varkappa - \lambda_i} \dfrac{g_i + h_i u + \cdots}{g_\varkappa + h_\varkappa u + \cdots}, \quad {\scriptstyle (i = 1, 2, \ldots \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, n-1)} \\ \dfrac{du}{dy_\varkappa} = \dfrac{1}{\alpha} u^{\lambda_\varkappa - (\lambda+\alpha)+1} \dfrac{g + hu + \cdots}{g_\varkappa + h_\varkappa u + \cdots}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten sind in der Umgebung des willkürlichen Werthsystems $x = x$, $y_1 = y_{10}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$ und $u = 0$ holomorphe Functionen von x, $y_1, \ldots, y_{n-1}, u$. Es giebt also ein System von Lösungen $x, y_1, y_2, \ldots, y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \ldots, y_{n-1}, u$ als Functionen von $u_\varkappa$, die sich in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $y_\varkappa - y_{\varkappa,0}$ entwickeln lassen und für $y_\varkappa = y_{\varkappa,0}$ beziehlich in $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{\varkappa-1,0}, y_{\varkappa+1,0}, \ldots, y_{n-1,0}, 0$ übergehen. Die Reihe für u reducirt sich hier auf $u = 0$, woraus hervorgeht, dass $y_n = \eta$ ein *particuläres* Integral ist. Gleichzeitig ergiebt die erste der Gleichungen (17.), dass $x = x_0$ ein Integral ist. Dadurch erklärt sich der anscheinende Widerspruch, dass mit $u = 0$, wie aus (17.) hervorgeht, $\frac{du}{dx}$ von Null verschieden, ja unendlich sein kann, da hier $-\lambda - \alpha + 1$ jeden beliebigen Werth haben darf.

Die erlangten Ergebnisse fassen wir in folgenden Sätzen zusammen:

Ist $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ eine Wurzel der aus

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(fx, y_1, y_2, \ldots, y_n, z)}{\partial z} = 0$$

hervorgehenden Discriminantengleichung

$$\Delta(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0,$$

so sind drei Fälle möglich:

1. $y_n = \eta$ ist ***kein*** Integral des vorgelegten Differentialgleichungssystems (1.), dann gilt für alle Integralsysteme, die die Eigenschaft haben, dass für einen willkürlichen Werth x_0 die Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ die willkürlich gegebenen Werthe $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}$ annehmen und y_n den Werth $\eta_0 = \eta(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0})$ erhält, die folgende Entwickelung

$$(18.)\qquad y_n - \eta = \mathfrak{P}(x - x_0),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, in der der Exponent der niedrigsten Potenz nicht grösser als 1 ist.

2) $y_n = \eta$ ist ein singuläres Integral, dann giebt es Integralsysteme obiger Beschaffenheit, für welche ebenfalls die Entwickelung (18.) gilt, bei denen aber der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ grösser als 1 ist.

3. $y_n = \eta$ ist ein particuläres Integral; dann reduciren sich einige Darstellungen von $y_n - \eta$ auf $y_n - \eta = 0$. Für den Fall, dass es ausserdem Darstellungen der Form (18.) giebt, in denen der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ grösser als 1 ist, ist $y_n = \eta$ zugleich ein singuläres Integral.

1. Bemerkung. In allen Fällen, wo $y_n = \eta$ ein singuläres Integral ist, gilt, wie aus (10.) ($\mu < \alpha$) und (13.) (λ negativ, $\lambda + \alpha$ positiv, also $-\lambda < \alpha$) hervorgeht, die Entwickelung

$$\alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dx} = h_0 u^k + h_1 u^{k+1} + \cdots,$$

wo $h_0, h_1 \ldots$ Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind, h_0 nicht identisch Null und k positiv und kleiner als α ist. Die Substitution $u = (y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ ergiebt

$$\frac{d(y_n - \eta)}{dx} = h_0 (y_n - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + h_1 (y_n - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots \qquad \left(\tfrac{k}{\alpha} < 1\right).$$

Da $\eta, h_0, h_1 \ldots$ Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind, also y_n nicht enthalten, so erkennt man, dass $\dfrac{\partial\left(\frac{dy_n}{dx}\right)}{\partial y_n} = \infty$ für $y_n = \eta$ ist.

Bemerkung 2. Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die Integrale des Systems (1.) in allen Fällen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar sind, also in x_0 algebraische Singularitäten aufweisen. Ausnahmen treten nur ein, wenn zwischen den willkürlichen Werthen $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}$ gewisse angebbare Bedingungsgleichungen bestehen, wodurch Continuen $(n-1)$-ter Dimension ausgeschlossen werden.

II.

Es sei

$$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{const.} \tag{18.}$$

ein Integral des vorgelegten Systems (1.). Wir suchen für F eine Entwickelung von $y_n - \eta$ mit von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ abhängigen Coefficienten. Aus (18.) folgt durch Differentiation nach x und Einsetzen der Werthe von $\frac{dy_i}{dx}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + R_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \cdots + R_n \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} = 0. \tag{19.}$$

Setzen wir hierin wieder $y_n = \eta + u^\alpha$, $z = \zeta + g_0 u^\varkappa + g_1 u^{\varkappa+1} + \cdots$ und bezeichnen φ als Function von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, u$ mit $\bar{\varphi}$, so wird

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\frac{\partial \eta}{\partial y_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} \cdot \alpha u^{\alpha-1},$$

und die Gleichung (19.) geht über in

$$(20.)\quad \alpha u^{\alpha-1}\left\{\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}+R_1\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_1}+\cdots+R_{n-1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}}\right\}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\left\{R_n-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i\right\}=0,$$

wo in den R_i überall die erwähnten Substitutionen für y_n und z zu machen sind.

Wir nehmen zunächst an, dass keine der Functionen R unendlich wird und $R_n-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i$ für $y_n=\eta,\ z=\zeta$ nicht identisch verschwindet, also $y_n=\eta$ kein Integral des Systems (1.) ist. Dann kann der Gleichung (20.) nach dem Satze der Frau ***von Kowalewsky*** durch eine Reihe von der Form

$$(21.)\qquad \bar{\varphi}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\frac{u^\nu}{\nu!}$$

genügt werden, wo $\varphi_0, \varphi_1\ldots$ nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihen sind, von denen φ_0 willkürlich angenommen werden kann und die übrigen sich aus der identischen Gleichung bestimmen, die sich durch die Einsetzung des Ausdruckes (21.) für $\bar{\varphi}$ in (20.) ergiebt:

$$(22.)\quad \begin{cases}\left(\varphi_1+\varphi_2u+\varphi_3\frac{u^2}{2!}+\varphi_4\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)\left(R_n(\eta,\zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2+\cdots\right)\\ \qquad=-\alpha u^{\alpha-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_1}R_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}\right)\frac{u_\nu}{\nu!}.\end{cases}$$

Aus dieser Identität fliesst, wenn man in $R_1, \ldots, R_{n-1}$ die Substitutionen $y_n=\eta+u^\alpha,\ z=\zeta+g_0u^\varkappa+\cdots$ macht, eine Folge von recurrenten Gleichungen, durch welche die Reihen $\varphi_1, \varphi_2\ldots$ successive eindeutig bestimmt werden. Insbesondere erhält man

$$\varphi_1=0,\quad \varphi_2=0, \ldots, \varphi_{\alpha-1}=0,$$

$$\frac{\varphi_\alpha}{(\alpha-1)!}(R_n(\eta,\zeta)-\sigma)=-\alpha\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_1}R_1(\eta,\zeta)+\cdots\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}(\eta,\zeta)\right).$$

Demnach wird

$$\bar{\varphi}=\varphi_0+\varphi_\alpha\frac{u^\alpha}{\alpha!}+\varphi_{\alpha+1}\frac{u^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}+\cdots.$$

Die Anzahl der von einander functionalunabhängigen Functionen $\bar{\varphi}$ kann nicht grösser als n sein; denn wenn $n+1$ Functionen $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_{n+1}$ der linearen partiellen Differentialgleichung (20.) genügen, so muss die Determinante $\frac{\partial(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_{n+1}}{\partial(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, u)}$ verschwinden. Man erhält n von einander unabhängige Functionen $\bar{\varphi}$ von $x, y_1, \ldots, y_{n-1}, u$, wenn man für die willkürliche Function φ_0 der Reihe nach $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ nimmt. Denn n solche Functionen können nur dann von einander abhängig sein, wenn die Functionaldeter-

minante derselben nach je n der Variablen verschwinden. Nun verschwindet aber die Functionaldeterminante der gewählten Functionen nach $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ nicht identisch, da ihr Werth für $u = 0$ gleich 1 ist, folglich sind die so bestimmten Functionen φ von einander unabhängig.

Indem wir für u seinen Werth $(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ wieder einsetzen, erhalten wir n von einander unabhängige Integrale mit je einer willkürlichen Constanten in der Form

$$\varphi_0+\frac{\varphi_\alpha}{\alpha!}(y_n-\eta)+\frac{\varphi_{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}(y_n-\eta)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+\frac{\varphi_{\alpha+2}}{(\alpha+2)!}(y_n-\eta)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}+\cdots=\text{const.},$$

wo für φ_0 der Reihe nach $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ zu nehmen ist, und $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}\ldots$ mittels obiger recurrirender Gleichungen durch φ_0 eindeutig bestimmt sind, und zwar sind sie, da sie aus den $R_i(\eta, \zeta)$ rational zusammengesetzt sind und im Nenner nur Potenzen von $R_n(\eta, \zeta)-\sigma$ auftreten, in der Umgebung von $x = x_0,\ y_1 = y_{10},\ \ldots,\ y_{n-1} = y_{n-1,0}$ holomorph. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n-\eta$ ist überall nicht kleiner als 1.

Nehmen wir jetzt an, dass $y_n-\eta$ ein Integral des Systems (1.) sei, dass also

$$R_n-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i$$

für $y_n = \eta,\ z = \zeta$ identisch verschwinde, und zwar laute, wie im vorigen Abschnitt die Entwickelung dieses Ausdrucks nach Potenzen von u, wenn $y_n = \eta+u^\alpha,\ z = \zeta+g_0u^\varkappa+\cdots$, gesetzt wird

$$h_\mu u^\mu+h_{\mu+1}u^{\mu+1}+\cdots,$$

wo h_μ von Null verschieden ist, dann erhält man aus (22.), wenn

1. $$\mu < \alpha,$$

$$(23.)\quad \begin{cases} \left(\varphi_1+\varphi_2u+\varphi\frac{u^2}{2!}+\varphi_4\frac{u^3}{3!}\right)(h_\mu+h_{\mu+1}u+\cdots) \\ \qquad = -\alpha u^{\alpha-1-\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_1}R_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}\right)\frac{u_\nu}{\nu!}. \end{cases}$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von u liefert:

$$(24.)\quad \begin{cases} \varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{\alpha-1-\mu}=0,\ h_\mu\frac{\varphi_{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu-1)!} \\ \qquad = -\alpha\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_1}R_1(\eta,\zeta)+\cdots+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}(\eta,\zeta)\right\}, \end{cases}$$

wobei zu bemerken, dass, wenn $\mu=\alpha-1$, schon φ_1 von Null verschieden

ist, so dass $\overline{\varphi}$ die Gestalt erhält

$$\overline{\varphi} = \varphi_0 + \frac{\varphi_{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!} u^{\alpha-\mu} + \frac{\varphi_{\alpha-\mu+1}}{(\alpha-\mu+1)!} u^{\alpha-\mu+1} + \cdots .$$

Es giebt also im vorliegenden Falle n von einander unabhängige Integrale des Systems (1.) von der Form

$$\varphi_\varkappa = \varphi_0 + \frac{\varphi_{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!}(y_n-\eta)^{\frac{\alpha-\mu}{\alpha}} + \frac{\varphi_{\alpha-\mu+1}}{(\alpha-\mu+1)!}(y_n-\eta)^{\frac{\alpha-\mu+1}{\alpha}} = \text{const.},$$

wo für φ_0 der Reihe nach $x, y_1, y_2 \ldots, y_{n-1}$ zu nehmen ist, und $\varphi_{\alpha-\mu}$, $\varphi_{\alpha-\mu+1}\ldots$, nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y_1-y_{1,0}\ldots$, $y_{n-1}-y_{n-1,0}$ fortschreitende Reihen sind, die mittelst der aus der Identität (23.) folgenden recurrenten Gleichungen successiv eindeutig bestimmt werden. Da der Ausdruck auf der linken Seite obiger Gleichung für $y_n=\eta$ gleich φ_0, also nicht constant wird, so ist $y_n=\eta$ ein ***singuläres*** Integral, insofern es nicht durch Specialisirung der Constanten aus den allgemeinen Integralen $\varphi_\varkappa = \text{const.}$ erhalten werden kann. Der Coefficient von $(y_n-\eta)^{\frac{\alpha-\mu}{\alpha}}$ ist gemäss (24.) jedenfalls von Null verschieden, wenn $\varphi_0 = x$ ist. Wir haben also unter der Voraussetzung, dass keine der Grössen $R(\eta, \zeta)$ unendlich wird, den Satz:

Ist $y_n=\eta$ ein ***singuläres*** Integral, so giebt es n von einander unabhängige Integrale des Systems (1.) von der Form

$$(25.) \qquad h_0 + h_r(y_n-\eta)^{\frac{r}{\alpha}} + h_{r+1}(y_n-\eta)^{\frac{r+1}{\alpha}} + \cdots = \text{const.},$$

wo für die h_0 der Reihe nach $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ zu nehmen ist, und $h_r, h_{r+1}, \ldots$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y_1-y_{1,0}, \ldots, y_{n-1}-y_{n-1,0}$ fortschreitende Reihen sind, der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n-\eta$ in demjenigen Integrale, wo $h_0=x$ genommen wird, ***kleiner*** als 1 ist.

Specialisirt man die Constanten auf der rechten Seite in den Integralen (25.) durch die Bedingung, dass $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ für $x=x_0$ beziehlich die Werthe $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}, \eta_0$ annehmen, so erhalten wir, indem wir wieder $y_n-\eta = u^\alpha$ setzen, und die Coefficienten $h_r, h_{r+1}, \ldots$, in der $\varkappa$-ten Gleichung mit $h_{r,\varkappa}, h_{r,\varkappa+1}, \ldots$, bezeichnen, die n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x - x_0 + h_{r,1}u^r + h_{r+1,1}u^{r+1} + \cdots &= 0,\\
y_1 - y_{10} + h_{r,2}u^r + h_{r+1,2}u^{r+1} + \cdots &= 0,\\
&\vdots\\
y_{n-1} - y_{n-1,0} + h_{r,n}u^r + h_{r+1,n}u^{r+1} + \cdots &= 0,
\end{aligned}$$

wo $h_{r,1}$ von Null verschieden ist. Diese Gleichungen lassen sich, da die Functionaldeterminante der Functionen auf der linken Seite nach den

Variablen $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ für $u = 0$ gleich 1, also von Null verschieden ist, durch Reihen für $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ befriedigen, die nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreiten, und zwar erhält man für x die Entwickelung

$$x - x_0 = -(h_{r1})_0 u^r + \beta u^{r+1} + \cdots,$$

wo

$$(h_{r1})_0 = h_{r1}(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}).$$

Die Umkehrung ergiebt

$$(y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}} = u = \left(-\frac{1}{(h_{r1})_0}\right)^{\frac{1}{r}} (x - x_0)^{\frac{1}{r}} + \gamma (x - x_0)^{\frac{2}{r}},$$

mithin

$$y_n - \eta = \left(-\frac{1}{(h_{r1})_0}\right)^{\frac{\alpha}{r}} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{r}} + \delta (x - x_0)^{\frac{\alpha+1}{r}} + \cdots.$$

Da in dem hier betrachteten Falle $\frac{r}{\alpha} < 1$ ist, so ist $\frac{\alpha}{r} > 1$. Die Entwickelung von $y_n - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ beginnt also mit einer höheren als der ersten Potenz. Dies war, wie im ersten Abschnitt gezeigt ist, das Kriterium dafür, dass der Ort $y_n = \eta$ eine Enveloppe sämmtlicher Integralcurven des Systems (1.) darstellt. Hier aber erkennen wir die Gleichung $y_n = \eta$ auch in dem Sinne als ein ***singuläres*** Integral, dass es, wie oben bemerkt, aus den vollständigen Integralen $\varphi_\varkappa = \text{const.}$, soweit sie aus der Zweiggruppe (4.) hervorgehen, nicht erhalten werden kann.

In dem vorher betrachteten Falle, wo $y_n = \eta$ kein Integral darstellt, war $\frac{r}{\alpha} = 1$, folglich beginnt da die Entwickelung von $y_n - \eta$ mit der ersten Potenz von $x - x_0$, in Uebereinstimmung mit dem Ergebniss des ersten Abschnitts.

Ist

2. $$\mu > \alpha - 1,$$

dann erhält man aus (20.) durch Division mit $u^{\alpha-1}$

$$\alpha \left\{\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + R_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + R_{n-1} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}}\right\} + u^{\mu-\alpha+1} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} \{h_\mu + h_{\mu+1} u + \cdots\} = 0.$$

Also wird für $u = 0$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + R_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + R_{n-1} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + R_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \cdots + R_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} \left\{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n-1} R_i \frac{\partial \eta}{\partial y_i}\right\} = 0,$$

für $y_n = \eta$.

Dies bedeutet aber, dass das totale Differential von φ nach x

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x},$$

für $y_n=\eta$ verschwindet, also $\varphi(x, y_2, \ldots, y_n)$ für $y_n=\eta$ constant wird. Mithin ist in diesem Falle $y_n=\eta$ ein particuläres Integral des Systems (1.), in Uebereinstimmung mit dem Ergebniss des ersten Abschnittes S. 329.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass einige der R für $y_n=\eta$ unendlich werden, und zwar mögen gemäss den Gleichungen (13.) die Entwickelungen gelten

$$(26.)\qquad \begin{cases} R_i=g_i u^{-\lambda_i}+h_i u^{-\lambda_i+1}+\cdots, \\ R_n-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i=g u^{-\lambda}+h u^{-\lambda+1}+\cdots. \end{cases}$$

Dann erhält man aus (20.), wenn

1. $\lambda_i<\lambda+\alpha$ für $i=1, 2, \ldots, n-1$ (also $\lambda+\alpha>0$)

durch Multiplication mit u^λ und Einsetzung des Ausdrucks (21.) für $\bar\varphi$

$$\left(\varphi_1+\varphi_2 u+\varphi_1\frac{u^2}{2!}+\varphi_4\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)(g+h_1 u+\cdots)$$

$$=-\alpha\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}u^{\alpha+\lambda-1}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_1}(g_1 u^{\lambda+\alpha-\lambda_1-1}+\cdots)+\cdots+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_{n-1}}(g_{n-1}u^{\lambda+\alpha-\lambda_{n-1}-1}+\cdots)\right\}\frac{u^\nu}{\nu!}.$$

Die Gleichsetzung der gleich hohen Potenzen von u auf beiden Seiten liefert eine Folge von recurrenten Gleichungen zur successiven Bestimmung von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, durch die willkürliche Function φ_0. Setzt man $\varphi_0=x$, dann wird

$$\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{\alpha+\lambda-1}=0$$

und man erhält

$$\bar\varphi=x+\varphi_{\alpha+\lambda}\frac{u^{\alpha+\lambda}}{(\alpha+\lambda)!}+\cdots.$$

Für $\varphi_0=y_i$

$$\bar\varphi=y_i+\varphi_{\alpha+\lambda-\lambda_i}\frac{u^{\alpha+\lambda-\lambda_i}}{(\alpha+\lambda-\lambda_i)!}+\cdots.$$

Demnach erhalten die n unabhängigen Integrale die Form:

$$(27.)\qquad \begin{cases} x+\varphi_{\alpha+\lambda}\dfrac{(y_n-\eta)}{(\alpha+\lambda)!}^{\frac{\alpha+\lambda}{\alpha}}+\cdots=\text{const.} \\ y_i+\varphi_{\alpha+\lambda-\lambda_i}\dfrac{(y_n-\eta)}{(\alpha+\lambda-\lambda_i)!}^{\frac{\alpha+\lambda-\lambda_i}{\alpha}}+\cdots=\text{const.} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1.) \end{cases}$$

Ist λ positiv, also $y_n=\eta$ kein Integral, dann ist der Exponent der der Anfangspotenz von $y_n-\eta$ in der Entwickelung der ersten Gleichung grösser als 1. Specialisirt man die Constanten durch die Bedingung, dass

$y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ für $x = x_0$ beziehlich in $y_{1,0}, \ldots, y_{n-1,0}, \eta_0$ übergehen, so erhält man

$$x - x_0 + \varphi_{\alpha+\lambda} \frac{u^{\alpha+\lambda}}{(\alpha+\lambda)!} + \cdots = 0,$$

$$y_i - \eta_{i0} + \varphi_{\alpha+\lambda-\lambda_i} \frac{u^{\alpha+\lambda-\lambda_i}}{(\alpha+\lambda-\lambda_i)!} + \cdots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

und durch dieselben Schlüsse, wie oben, die Entwickelung

$$y_n - \eta = -\frac{(\alpha+\lambda)!}{(\varphi_{\alpha+\lambda})_0} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}} + \cdots,$$

also in Uebereinstimmung mit dem Satze des ersten Abschnitts, wonach, falls $y_n = \eta$ kein Integral des Systems (1.) ist, der Exponent der niedrigsten Potenz von $(x - x_0)$ in der Entwickelung von $y_n - \eta$ kleiner als Eins ist.

Ist λ negativ, aber so, dass $\lambda + \alpha > 0$ und $> \lambda_i$, dann ist $y_n = \eta$ ein Integral des Systems (1.). Da die Ausdrücke auf der linken Seite der Integrale (27.) für $y_n = \eta$ nicht constant werden, so ist $y_n = \eta$ ein *singuläres* Integral. In diesem Falle ist der Exponent $\frac{\alpha+\lambda}{\alpha}$ der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ in der Reihe auf der linken Seite der ersten Gleichung (27.) kleiner als 1, und demgemäss der Exponent $\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}$ der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ in der Entwickelung von $y_n - \eta$ grösser als 1, conform mit dem Ergebniss des ersten Abschnitts.

Ist

2. $$\lambda_i \geqq \lambda + \alpha$$

für mindestens einen der Indices i, und zwar sei $\lambda_\varkappa$ nicht kleiner als die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\varkappa-1}, \lambda_{\varkappa+1}, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda + \alpha$, wobei dann $\lambda_\varkappa$ positiv sein muss (vgl. S. 331). Dann folgt aus (20.) durch Division mit $u^{\alpha-1} \cdot R_\varkappa$ mit Rücksicht auf (26.)

$$\alpha \left\{ \frac{1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{R_1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + \frac{R_{n-1}}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}} \right\}$$

$$= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} \left\{ \frac{g}{g_\varkappa} u^{\lambda_\varkappa - \lambda - \alpha + 1} + \text{Gl. mit höheren Potenzen von } u \right\}.$$

Die Coefficienten von $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}}$ sind sämmtlich endlich für $u = 0$ oder $y_n = \eta$, da die Exponenten der Anfangspotenzen von u in ihnen resp. $\lambda_\varkappa, \lambda_\varkappa - \lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa - \lambda_{n-1}$, also nach unserer jetzigen Voraussetzung positiv oder Null sind. Aber $\lambda_\varkappa - \lambda - \alpha + 1$ ist > 0, daraus folgt, dass die rechte Seite für $u = 0$ verschwindet, mithin ist auch

$$\frac{1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{R_1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + \frac{R_{n-1}}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}} = 0 \text{ für } u = 0$$

oder

$$\frac{1}{R_z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{R_1}{R_z}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\cdots+\frac{R_{n-1}}{R_z}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n-1}R_i\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right\}}{R_z}=0,$$

und da hier

$$\frac{R_n}{R_z}-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{R_i}{R_z}=0 \text{ für } u=0 \text{ (vgl. S. 331)},$$

so wird

$$\frac{1}{R_z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{R_1}{R_z}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\cdots+\frac{R_n}{R_z}\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dy_z}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dy_z}=\frac{d\varphi}{dy_z}=0 \text{ für } y_n=\eta.$$

Folglich wird $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ für $y_n=\eta$ constant, $y_n=\eta$ also ein *particuläres* Integral in Uebereinstimmung mit dem Ergebniss des ersten Abschnitts (S. 331).

III.

Für die Function φ in dem Integrale

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)=\text{const.}$$

haben wir im vorigen Abschnitt, der Zweiggruppe (4.) von z als Function von y_n entsprechend, für φ Ausdrücke abgeleitet, die, falls keine der Grössen R unendlich wird, was wir hier der Einfachheit wegen voraussetzen, auf die gemeinsame Form

$$\varphi=L_0+L_1(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}+L_2(y_n-\eta)^{\frac{2}{\alpha}}+\cdots+L_{\alpha-1}(y_n-\eta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

gebracht werden können, wo $L_0, L_1, \ldots, L_{\alpha-1}$ Reihen bedeuten, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y_1-y_{1,0}, \ldots, y_{n-1}-y_{n-1,0}, y_n-\eta$ fortschreiten.

Den α verschiedenen Werthen von $(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ entsprechen α verschiedene Ausdrücke für die L und ebensoviele für die φ, die wir mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha$ bezeichnen. Die Coefficienten der Potenzen von C in dem Producte

$$(C-\varphi_1)(C-\varphi_2)\ldots(C-\varphi_\alpha)$$

sind als symmetrische Functionen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ durch Reihen darstellbar, die nach ganzen positiven Coefficienten der obigen Grössen fortschreiten, und da η eine Reihe von der Form $\eta=y_{n,0}+\mathfrak{P}(x-x_0, y_1-y_{1,0}, \ldots, y_{n-1}-y_{n-1,0})$ ist, schliesslich durch Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y_1-y_{1,0}, \ldots, y_n-y_{n,0}$ fortschreiten.

Die Gleichung

$$(C-\varphi_1)(C-\varphi_2)\ldots(C-\varphi_\alpha)=0$$

stellt ein Integral des Differentialgleichungssystems (1.) dar, entsprechend den α Zweigen von z als algebraischer Function von y_n, die der Gruppe

(4.) angehören. Stellt man ebenso die Gleichungen auf, die den übrigen Zweiggruppen von z entsprechen, so erhält man, da die algebraische Gleichung (2.) in z vom m-ten Grade ist, als Integral des Differentialgleichungssystems (1.) eine Gleichung m-ten Grades in C von der Form

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, C) = 0, \tag{28.}$$

worin der Coefficient von C^m gleich 1 und die Coefficienten der übrigen Potenzen von C in der Umgebung eines willkürlichen Werthsystems x_0, $y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}$ in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y_1-y_{10}, \ldots, y_n-y_{n,0}$ entwickelt werden können. Die auszuschliessenden Werthsysteme sind durch gewisse Bedingungsgleichungen zwischen $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n,0}$ gegeben, erfüllen also Continuen $(n-1)$-ter Dimension. Indem man für die bei der Herstellung der Gleichung (28.) auftretende willkürliche Function φ_0 der Reihe nach $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ wählt, erhält man n von einander unabhängige Integrale in der Form

$$F_1(x, y_1, \ldots, y_n, C_1) = 0, \quad \ldots, \quad F_n(x, y_1, \ldots, y_n, C_n) = 0$$

wo die Functionen F_i die Beschaffenheit der Function F in (28.) hat, und wo jeder Wurzel z der Gleichung (2.) $f(x, y_1, \ldots, y_n, z) = 0$ ein bestimmtes System der Wurzeln $C_1, \ldots, C_n$ zugeordnet ist. — Gehen wir jetzt von dem System der primitiven Gleichungen aus

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{29.}$$

deren linke Seiten Polynome der Constanten $C_1, \ldots, C_n$ sind, mit Coefficienten, die eindeutige Functionen von $x, y_1, \ldots, y_n$ seien. Die Elimination von je $n-1$ der Constanten, möge die n Gleichungen

$$F_1(x, y_1, \ldots, y_n, C_1) = 0, \quad \ldots, \quad F_n(x, y_1, \ldots, y_n, C_n) = 0 \tag{30.}$$

ergeben, die in Beziehung auf die Constanten vom m-ten Grade sein mögen. Damit die Gleichungen (30.) und (29.) völlig äquivalent sind, ist noch die Combination der Wurzeln für $C_1, \ldots, C_n$ anzugeben, die zu wählen ist, damit sie Lösungen des Gleichungssystems (29.) sind. Bezeichnet man die m Wurzeln der $\varkappa$-ten Gleichung von (30.) mit $C_\varkappa^1, C_\varkappa^2, \ldots, C_\varkappa^m$, so mögen C_1^λ, $C_2^\lambda, \ldots, C_n^\lambda$ zusammengehörige Wurzeln sein.

Differentiirt man die Gleichungen (30.) total nach x, so erhält man entsprechend den m Wurzelgruppen m Systeme von Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{dy_n}{dx} = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x} + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} + \cdots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{dy_n}{dx} = 0, \end{array}\right. \tag{31.}$$

denen die Gleichungen (29.) als Integrale genügen.

Setzt man $u_1C_1+u_2C_2+\cdots+u_nC_n=z$, wo $u_1,\ldots,u_n$ unbestimmte Coefficienten bedeuten, so genügt z einer Gleichung m-ten Grades $f(x, y_1, \ldots, y_n, z)=0$, und $C_1,\ldots,C_n$ sind rationale Functionen von z, so dass jeder Wurzel z eine bestimmte Combination von Wurzel $C_1^\lambda,\ldots,C_n^\lambda$ entspricht; aus den Gleichungen (31.) folgt dann, dass auch $\frac{dy_1}{dx},\ldots\frac{dy_n}{dx}$ rationale Functionen von z sind, so dass die m Systeme (31.) ersetzt werden können durch

$$(32.)\qquad \frac{dy_i}{dx}=R_i(x,\eta_1,\ldots,\eta_2,z),\ (i=1,2,\ldots,n),\qquad f(x,y_1,\ldots,y_n,z)=0,$$

denen die Gleichungen (30.) als Integrale genügen.

Differentiirt man eine der Gleichungen (30.), die wir kurz mit $F(x,y_1,\ldots,y_n,C)=0$ bezeichnen, total nach x, indem wir C als durch diese Gleichung bestimmte Function von $x,y_1,\ldots,y_n$ betrachten und berücksichtigen (32.), so erhält man

$$(33.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F}{\partial y_1}R_1(x,y_1,\ldots,y_n,z)+\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}(x,y_1,\ldots,y_n,z)+\dfrac{\partial F}{\partial y_n}\dfrac{dy_n}{dx} \\ \qquad\qquad =-\dfrac{\partial F}{\partial C}\dfrac{dC}{dx}, \end{array}\right.$$

wo

$$\frac{dC}{dx}=\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y_1}R_1+\cdots+\frac{\partial C}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}+\frac{\partial C}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Die linke Seite von (33.), gleich Null gesetzt, muss übereinstimmen mit der Gleichung

$$\frac{dy_n}{dx}=R_n(x,y_1,\ldots,y_n,z),$$

woraus folgt, dass identisch

$$(34.)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx}-R_n(x,y_1,\ldots,y_n,z)\right)=-\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx},$$

wobei jeder Wurzel z der Gleichung $f(x,y_1,\ldots,y_n,z)=0$ eine bestimmte Wurzel C der Gleichung $F(x,y_1,\ldots,y_n,C)=0$ entspricht. Aus (34.) geht zunächst hervor, dass die Differentialgleichungen (32.) durch $C=$ const. befriedigt werden, da der Factor $\frac{\partial F}{\partial y_n}$, der keine Constanten enthält, nicht für einen beliebigen Werth der Constanten verschwinden kann, demnach ist $F(x,y_1,\ldots,y_n,C)=0$ ein Integral des Systems (32.) mit willkürlicher Constante. Aber die Gleichungen (32.) können auch erfüllt werden, wenn $\frac{\partial F}{\partial C}=0$ gleichzeitig mit $F=0$ wird. Bezeichnet man mit

$$D(x,y_1,\ldots,y_n)=0$$

die Discriminantengleichung, die durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$F(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y_1, \ldots, y_n, C)}{\partial C} = 0$$

hervorgeht, und wird dieser Gleichung durch $y_n = \eta(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ genügt, so stellt die letztere Gleichung, falls sie die Gleichungen (32.) befriedigt und für $y_n = \eta$ keine der Wurzeln C einen constanten Werth erhält, ein ***singuläres*** Integral, im Falle einige der Wurzeln C constant werden, zugleich ein singuläres und particuläres Integral und endlich, falls alle Wurzeln C constant werden, nur ein particuläres Integral dar. Aber wie aus (34.) hervorgeht, kann $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ werden, ohne dass $\frac{dy_n}{dx} - R_n = 0$ wird, indem nämlich nur der Factor $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ verschwindet. In diesem Falle ist $y_n = \eta$ überhaupt kein Integral des Differentialgleichungssystems (32.). Es ist nun festzustellen, unter welcher Bedingung dies eintritt.

Da für $y_n = \eta$ mehrere Wurzeln C der Gleichung $F(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0$ einander gleich werden, so mögen p Wurzeln C für $y_n = \eta$ den gleichen Werth ζ annehmen, der nicht constant sein soll, da sonst $y_n = \eta$ ein particuläres Integral wäre. Die Gleichung $F(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0$ nach Potenzen von $y_n - \eta$ und $C - \zeta$ entwickelt, erhält dann die Form

$$(35.) \quad F = (y_n - \eta)\mathfrak{P}_0(y_n - \eta, C - \zeta) + (C - \zeta)^p \mathfrak{P}_1(y_n - \eta, C - \zeta) = 0 \qquad (p > 1),$$

wo $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $y_n - \eta$, $C - \zeta$ mit von $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ abhängenden Coefficienten bedeuten, und $\mathfrak{P}_1$ für $y_n = \eta$ und $C = \zeta$ nicht verschwindet. Nun möge eine Gruppe von $\alpha \leqq p$ Zweigen der Function C, die für $y_n = \eta$ den Werth ζ annehmen, die Entwickelung haben

$$(36.) \qquad C - \zeta = g_0(y_n - \eta)^{\frac{r}{\alpha}} + g_1(y_n - \eta)^{\frac{r+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo g_0, g_1 in der Umgebung des willkürlichen Systems $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}$ holomorphe Functionen sind und g_0 nicht identisch verschwindet. Aus (34.) erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y_n - \eta)\mathfrak{P}_2(y_n - \eta, C - \zeta) + (C - \zeta)^{p-1}\mathfrak{P}_3(y_n - \eta, z - \zeta),$$

wo $\mathfrak{P}_3$ für $y_n = \eta$, $z = \zeta$ nicht verschwindet.

Die Substitution (36.) für $C - \zeta$ möge ergeben:

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y_n - \eta)^{\varrho}\mathfrak{P}_0\left((y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \qquad (\varrho > 0),$$

wo $\mathfrak{P}_0$ für $y_n = \eta$ nicht verschwindet. ϱ wird nur dann kleiner als 1 sein,

wenn $(p-1)\frac{r}{\alpha}<1$ ist, und in diesem Falle ist $\varrho=(p-1)\frac{r}{\alpha}$, sonst ist $\varrho\geqq 1$.

Nun folgt ebenfalls aus (36.)

$$\frac{dC}{dx}=\frac{d\zeta}{dx}+(y_n-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)+(y_n-\eta)^{\frac{r}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(\frac{dy_n}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für $y_n=\eta$ nicht verschwinden. Also wird

$$(36.)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial C}\dfrac{dC}{dx}=\mathfrak{P}_0\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)(y_n-\eta)^{\varrho}\left(\dfrac{d\zeta}{dx}+(y_n-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\\ \qquad\qquad+(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\dfrac{dy_n}{dx}-\dfrac{d\eta}{dx}\right),\end{cases}$$

wobei noch zu bemerken ist, dass $\frac{d\zeta}{dx}$ von Null verschieden ist, da ζ nicht constant sein soll.

Ist nun $\frac{r}{\alpha}\geqq 1$, so erhält man aus der rechten Seite von (37.) nach Abtrennung von $(y_n-\eta)^{\varrho}$ einen Ausdruck, der für $y_n=\eta$ nicht verschwindet. Aus (34.) folgt, dass der Factor $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ die Potenz $(y_n-\eta)^{\varrho}$ als Theiler enthält, während $\frac{dy_n}{dx}-R_n(x, y_1, \ldots, y_n, z)$ nicht verschwindet, also ist in diesem Falle $y_n=\eta$ kein Integral der Gruppe der Differentialgleichungssysteme, welche aus der Zweiggruppe (36.) hervorgehen.

Ist aber $\frac{r}{\alpha}<1$, dann ist $(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}$ die höchste gemeinsame Potenz von $y_n-\eta$ auf der rechten Seite von (36.). Diese Potenz ist nie negativ, denn nach obiger Bemerkung muss, wenn $\varrho<1$ ist, $\varrho=(p-1)\frac{r}{\alpha}$ sein, also $\varrho+\frac{r}{\alpha}-1\equiv p\cdot\frac{r}{\alpha}-1$, mithin da $p\geqq\alpha, \varrho+\frac{r}{\alpha}-1\geqq r-1$. Nach Abtrennung von $(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}$ bleibt auf der rechten Seite von (37.) ein Ausdruck, der $y_n-\eta$ nicht mehr als Factor enthält, aber doch für $y_n=\eta$ verschwindet, weil $\frac{dy_n}{dx}=\frac{d\eta}{dx}$ wird. Also wird auch nach (34.) $\frac{\partial F}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx}-R_n(x, y_1, \ldots, y_n, z)\right)$ nach Abtrennung der höchsten Potenz $(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}$, die nur in $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ als Theiler enthalten sein kann, für $y_n=\eta$ verschwinden, folglich wird $\frac{dy_n}{dx}-R_n(x, y_1, \ldots, y_n, z)=0$ für $y_n=\eta$; also ist $y_n=\eta$ ein Integral, und da für $y_n=\eta$ C nicht constant wird, ein ***singuläres*** Integral der aus (36.) hervorgehenden Gruppe der Differentialgleichungssysteme.

$y_n = \eta$ ist also überhaupt kein Integral, wenn in keiner Entwickelung von C als Function von y_n, definirt durch die Gleichung $F(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0$, nach Potenzen von $y_n - \eta$, der Exponent der niedrigsten Potenz kleiner als 1 ist. Es ist ein Integral, wenn in einigen Entwickelungen der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ grösser oder gleich 1 ist, und zwar ein singuläres, und falls einige der Wurzeln C für $y_n = \eta$ constant werden, zugleich ein particuläres.

Im vorigen Abschnitt haben wir, von den Differentialgleichungen ausgehend, übereinstimmend mit den vorstehenden Ergebnissen festgestellt, dass $y_n = \eta(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ kein Integral ist, wenn bei der Entwickelung von C_i als Function von $y - \eta$ nach Potenzen von $y_n - \eta$ in keiner der Integralgleichungen $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i$ der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ $\frac{r}{\alpha} < 1$ ist, dagegen ein Integral, wenn wenigstens für eine Integralgleichung $\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1$ (nämlich derjenigen, die der Annahme, dass die willkürliche Function $\varphi_0 = x$ sei, entspricht) der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ kleiner als 1 ist. Dies galt, wie aus der Ableitung hervorgeht, für jede beliebige Function η. Wenn $y_n = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung $\Delta = 0$ ist, so sahen wir, dass im letzteren Falle $y_n = \eta$ ein singuläres Integral ist. Daraus erkennt man, dass die Discriminantengleichungen $\Delta = 0$ und $D = 0$ die singulären Lösungen $y_n = \eta$ zu gemeinsamen Wurzeln haben müssen. Während indess von den Coefficienten der Differentialgleichungen (1.) eine Bedingung erfüllt werden muss, damit eine singuläre Lösung existire, nämlich dass $R_n = \sigma$ ist, haben die Coefficienten der Integralgleichungen eine Bedingung zu erfüllen, damit keine singuläre Lösung vorhanden sei. Denn in diesem Falle enthält, wie im Vorhergehenden entwickelt ist, sowohl $\frac{\partial F}{\partial C}$ als $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ die Potenz $(y_n - \eta)^\varrho$ als Factor. Es muss also für $y_n = \eta$ mit $D = 0$ zugleich $\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0$ sein.

Anmerkung: Die Discriminantengleichungen, die wir erhalten, indem wir aus je einer der Gleichungen $F_i(x, y_1, \ldots, y_n, C_i) = 0$ und ihrer Ableitung nach C_i die Constante C_i eliminiren, brauchen nicht mit einander übereinzustimmen, doch müssen sie alle mit $\Delta = 0$ die singulären Lösungen $y = \eta$ zu gemeinsamen Wurzeln haben. Man kann nun, ohne Bevorzugung einer einzelnen Constante C_i, von dem Systeme der vollständigen Lösungen (29.)

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ \ldots, \ \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n, C_1, \ldots, C_n) = 0$$

ausgehend, zur Discriminantengleichung gelangen, indem man die Bedingung aufstellt, dass die vorstehenden Gleichungen als algebraische Gleichungen zwischen den Unbekannten $C_1, \ldots, C_n$ betrachtet, ein Wurzelsystem mehrfach besitzen. Dieselbe ergiebt sich bekanntlich durch Elimination sämmtlicher Constanten aus den $n+1$ Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_n = 0, \quad \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial C_n} = 0.$$

Das Eliminationsresultat $D = 0$ hat mit $\Delta = 0$ die singulären Lösungen gemeinsam.

Anwendungen:*)

1. Beispiel.

$$(1.) \quad \begin{cases} \left(x + \frac{dy_1}{dx}\right)\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} - y_1 = 0, \\ \left(x + \frac{dy_1}{dx}\right)\frac{dy_2}{dx} - y_2 = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$\frac{2}{3}x + \frac{dy_1}{dx} = z,$$

so geht das System über in

$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = z - \frac{2x}{3}, \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{z + \frac{x}{3}} = y_1 - \left(z + \frac{x}{3}\right)\left(z - \frac{2x}{3}\right), \end{cases}$$

Dadurch ergiebt sich als Gleichung für z:

$$z^3 = \left(\frac{1}{3}x^2 + y_1\right)z + \frac{2}{27}x^3 + \frac{x}{3}y_1 - y_2 = pz + q.$$

Die Discriminante lautet

$$\Delta = 4p^3 - 27q^2 = 0,$$

woraus

$$q = 2\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

also

$$y_2 = \frac{2}{27}x^3 + \frac{x}{3}y_1 - \frac{2}{27}(x^2 + 3y_1)^{\frac{3}{2}} = \eta(x, y).$$

Die Function η ist überall holomorph mit Ausnahme der Werthsysteme x, y_1, für die $x^2 + 3y_1 = 0$ ist. Die zu $y_2 = \eta$ gehörige doppelte Wurzel ζ von z ist

$$\zeta = -\sqrt{\frac{p}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 3y_1}.$$

---

*) Die Beispiele sind aus der Abhandlung des Herrn ***A. Mayer***: Ueber die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst. Math. Ann. XXII.

Zunächst überzeugen wir uns, dass $y_2 = \eta$ ein Integral des Systems (2.) ist. Hierzu muss

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y_1}\left(\zeta - \frac{2x}{3}\right) = y_1 - \left(\zeta + \frac{x}{3}\right)\left(\zeta - \frac{2x}{3}\right) \tag{3.}$$

sein, welche Gleichung identisch erfüllt wird.

Es ist nun diejenige Function z von y_2, die für $y_2 = \eta$ in ζ übergeht, nach Potenzen von $y_2 - \eta$ zu entwickeln. Wir haben

$$z^3 = \left(\frac{1}{3}x^2 + y_1\right)z + \frac{2}{27}x^3 + \frac{x}{3}y_1 - y_2,$$

$$\zeta^3 = \frac{1}{3}(x^2 + y_1)\zeta + \frac{2}{27}x^3 + \frac{x}{3}y_1 - \eta,$$

also $$z^3 - \zeta^3 = (\tfrac{1}{3}x^2 + y_1)(z - \zeta) - (y_2 - \eta),$$

oder $$(z-\zeta)\{(z-\zeta)^2 + 3\zeta(z-\zeta) + 3\zeta^2 - \tfrac{1}{3}x^2 - y_1\} = y_2 - \eta,$$

und da $$\zeta = -\tfrac{1}{3}\sqrt{x^2 + 3y_1},$$

$$(z-\zeta)^2\{z - \zeta + 3\zeta\} = y_2 - \eta.$$

Hieraus ergiebt sich die Entwickelung

$$z = \zeta + \frac{1}{\sqrt{3\zeta}}(y_2 - \eta)^{\frac{1}{2}} + \alpha(y_2 - \eta)^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Aus (2.) folgt, wenn man

$$y_2 = \eta + u^2, \qquad z = \zeta + \frac{u}{\sqrt{3\zeta}} + \alpha u^2 + \cdots$$

setzt,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y_1}\left(-\frac{2}{3}x + \zeta + \frac{u}{\sqrt{3\zeta}} + \alpha u^2 + \cdots\right) + 2u\frac{du}{dx}$$

$$= y_1 - \left(\frac{x}{3} + \zeta + \frac{u}{\sqrt{3\zeta}} + \alpha u^2 + \cdots\right)\left(-\frac{2x}{3} + \zeta + \frac{u}{\sqrt{3\zeta}} + \alpha u^2 + \cdots\right.$$

oder nach (3.)

$$2u\frac{du}{dx} = \frac{u}{\sqrt{3\zeta}}\left\{-\frac{\partial \eta}{\partial y_1} + \frac{x}{2} - 2\zeta\right\} + \beta u^2 + \cdots,$$

und da

$$\frac{x}{3} - \frac{\partial \eta}{\partial y_1} = -\zeta,$$

$$2u\frac{du}{dx} = -\sqrt{3\zeta}\cdot u + \beta u^2 + \cdots,$$

sodass der Coefficient von u nicht identisch verschwindet. Setzen wir wieder

$$u = (y_2 - \eta)^{\frac{1}{2}},$$

so ergiebt sich die Entwickelung

$$\frac{d(y_2 - \eta)}{dx} = -\sqrt{3\zeta}(y_2 - \eta)^{\frac{1}{2}} + \beta(y_2 - \eta)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

sodass also der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_2 - \eta$ in der Ent-

wickelung von $\frac{d(y_2-\eta)}{dx}$ kleiner als 1 ist; folglich ist nach S. 333 des ersten Abschnitts

$$y_2 = \eta = \frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1-\frac{2}{27}(x^2+3y_1)^{\frac{3}{2}}$$

ein singuläres Integral. In der That folgt aus

$$2\frac{du}{dx} = -\sqrt{3\zeta}+\beta u+ \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx} = \zeta-\frac{2x}{3}+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}u+\cdots$$

das Diffentialgleichungssystem mit der unabhängigen Variablen u

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{-\sqrt{3\zeta}}+\gamma u+\cdots, \qquad \frac{dy_1}{du} = 2\frac{\zeta-\frac{2x}{3}}{-\sqrt{3\zeta}}+\delta u+\cdots,$$

deren Lösungen mit den Anfangswerthen $x = x_0$, $y_1 = y_{10}$ für $u = 0$ lauten:

$$x-x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3\zeta_0}}u+\cdots, \qquad y_1-y_{10} = -\frac{2(\zeta_0-\frac{2}{3}x_0)}{\sqrt{3\zeta_0}}u+\cdots,$$

woraus

$$u = -\frac{\sqrt{3\zeta_0}}{2}(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)^2+\cdots, \qquad y_2-\eta = \frac{3\zeta_0}{4}(x-x_0)^2+\delta(x-x_0)^3+\cdots.$$

Der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-x_0$ in der Entwickelung von $y_2-\eta$ ist also grösser als 1. Betrachtet man x, y_1, y_2 als Coordinaten eines Punktes im Raume, so ist die Fläche

$$\left(\frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1-y_2\right)^2 = \frac{4}{27}(x^2+3y_1)^3,$$

wovon $y_2 = \eta$ ein Zweig ist, eine Enveloppe der Integralcurven des Systems (1.). Um die singulären Curven zu erhalten, die auf der Fläche liegen, haben wir die erste der Gleichungen (2.), worin $y_2 = \eta$, $z = \zeta$ zu setzen ist, zu integriren, dieselbe lautet:

$$\frac{dy_1}{dx} = \zeta-\frac{2x}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{x^2+3y_1}-\frac{2x}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(y_1+\frac{x^2}{3}\right)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{y_1+\frac{x^2}{3}}.$$

Die Integration ergiebt $2\sqrt{y_1+\frac{x^2}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3c)$, wo c eine willkürliche Constante ist. Die Curve wird also dargestellt durch

$$(4.)^*) \quad \begin{cases} y_1 = -\frac{x^2}{3}+\frac{(x-3c)^2}{12} = -\frac{(x-c)(x+3c)}{4}, \\ y_2 = \frac{2}{27}x^3-\frac{x(x-c)(x+3c)}{12}+\frac{2}{27}\left(\frac{x-3c}{2}\right)^3 = -\frac{c}{4}(x-c)^2. \end{cases}$$

Die vollständigen Lösungen lauten:

$$(5.) \qquad y_1 = a(x+a)+b, \qquad y_2 = b(x+a),$$

wo a und b willkürliche Constanten sind.

*) Vergl. *Mayer* a. a. O. S. 382.

Die Elimination von b ergiebt

$$(6.) \qquad \left(a+\frac{2x}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x^2+y_1\right)\left(a+\frac{2x}{3}\right)+\frac{2}{27}x^3+\frac{xy_1}{3}-y_2,$$

also dieselbe Gleichung für $a+\frac{2x}{3}$, wie oben für z, die Discriminante in Bezug auf a fällt also hier mit Δ zusammen. Die Entwickelung von a nach Potenzen von $y_2-\eta$, wo η die obige Bezeichnung hat, lautet, wenn man beachtet, dass für $y_2=\eta \quad a+\frac{2x}{3}=\zeta=-\frac{1}{3}\sqrt{x^2+3y_1}$ ist,

$$a+\frac{2x}{3}=\zeta+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}(y_2-\eta)^{\frac{1}{2}}+\beta(y_2-\eta)^{\frac{2}{2}}+\cdots,$$

wonach also der Exponent der niedrigsten Potenz kleiner als 1 ist. Dies war aber nach S. 336 des zweiten Abschnitts ebenfalls ein Kriterium dafür, dass $y_2=\eta$ ein singuläres Integral ist. Specialisirt man die Constanten a und b so, dass die durch (5.) dargestellte Curve durch einen Punkt einer der Curven (4.) hindurchgeht, indem man

$$a=-\frac{x_0+c}{2}, \qquad b=-\frac{c}{2}(x_0-c)$$

setzt, wodurch y_1 und y_2 für $x=x_0$ in (5.) dieselben Werthe erhalten wie in (4.), so erhält man in dem Schnittpunkte auch für die Ableitungen $\frac{dy_2}{dx}$, $\frac{dy_1}{dx}$ in (5.) und (4.) dieselben Werthe nämlich bez. $-\frac{x_0+c}{2}$, $-\frac{c}{2}(x_0-c)$, sodass jede Curve aus der Curvenschar (4.), also für ein beliebiges c, die Enveloppe einer Curvenschar aus dem Curvennetz (5.) darstellt, nämlich derjenigen Curvenschar, die aus (5.) hervorgeht, wenn man in den obigen Ausdrücken für a und b bei beliebig fixirtem c x_0 variiren lässt. Die Curvenschar (4.) lässt sich übrigens offenbar nicht durch Beziehungen, die man zwischen den Constanten a und b einführt aus den vollständigen Integralcurven (5.) erhalten, ist also singulär.

Die Curve auf der Fläche $\Delta=0$, die die Ausnahmepunkte enthält, bei denen η aufhört, holomorph zu sein, ist, wie oben bemerkt, durch die Gleichungen

$$x^2+3y_1=0, \quad \text{also } y_1=-\frac{x^2}{3}$$

gegeben, der zugehörige Werth von y_2 auf der genannten Fläche wird

$$y_2=\eta=\frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1=-\frac{x^3}{27}.$$

Die Curve $y=-\frac{x^2}{3}$, $y_2=-\frac{x^3}{27}$, $y_2=-\frac{x^3}{27}$ ist die Enveloppe der singulären Curvenschar (4.).*)

2. Beispiel.

$$\text{(7.)}\qquad \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^3+\frac{x}{2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2-\left(\frac{dy_1}{dx}+1\right)y_1-y_2=0, \\ \frac{dy_1}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2+\frac{dy_2}{dx}=0. \end{cases}$$

Setzt man

$$\frac{x}{2}+\frac{dy_1}{dx}=z,$$

so geht das System (7.) über in

$$\text{(8.)}\qquad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx}=z-\frac{x}{2}, \\ \frac{dy_2}{dx}=-\left(z-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(z-\frac{x}{2}\right)^2, \end{cases}$$

während z der Gleichung genügt

$$z^3=3\left(\frac{x^2}{4}+y_1\right)z-\frac{x^3}{4}+3y_1\left(1-\frac{x}{2}\right)+3y_2=pz+q.$$

Die Discriminante

$$4p^3-27q^2=0$$

hat zur Wurzel

$$y_2=\eta=\frac{x^3}{12}+\frac{xy_1}{2}-y_1+\frac{1}{12}(x^2+4y_1)^{\frac{3}{2}}.$$

Die zugehörige doppelte Wurzel ζ von z ist

$$\zeta=-\frac{1}{2}(x^2+4y_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Function η ist überall holomorph mit Ausnahme der Werthepaare x, y_1, für die $x^2+4y_1=0$ ist.

Da identisch

$$\text{(9.)}\qquad -\left(\zeta-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\zeta-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y_1}\left(\zeta-\frac{x}{2}\right)=\sigma$$

ist, so ist $y_2=\eta$ ein Integral des Systems (7.).

Wie bei dem vorigen Beispiele erhält man die Entwickelung

$$z=\zeta+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}(y_2-\eta)^{\frac{1}{2}}+\beta(y_2-\eta)^{\frac{2}{2}}+\cdots.$$

Aus (8.) folgt dann, indem man

$$y_2=\eta+u^2,\quad z=\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots$$

---

*) Vgl. *Mayer* a. a. O. S. 383.

setzt,

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y_1}\left(-\frac{x}{2}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\right)+2u\frac{du}{dx}$$
$$=-\left(-\frac{x}{2}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left\{-\frac{x}{2}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\right\}^2$$

oder nach (9.)

$$\frac{d(y_2-\eta)}{dx}=2u\frac{du}{dx}=\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}\left\{-\frac{\partial\eta}{\partial y_1}-1+\frac{x}{2}-\zeta\right\}+\beta u^2+\cdots.$$

Nun ist

$$\frac{\partial\eta}{\partial y_1}=-1+\frac{x}{2}-\zeta,$$

folglich wird der Coefficient von u auf der rechten Seite identisch gleich Null. Wir erhalten also

$$\frac{d(y_2-\eta)}{dx}=\beta(y_2-\eta)+\gamma(y_2-\eta)^{\frac{3}{2}}+\cdots.$$

Da der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_2-\eta$ in der Entwickelung von $\frac{d(y_2-\eta)}{dx}$ gleich 1 ist, so ist nach S. 329 des ersten Abschnitts $y_2-\eta$ ein particuläres Integral. Auch folgt aus den Differentialgleichungen

$$2\frac{du}{dx}=\beta u+\gamma u^2+\cdots,\quad \frac{dy_1}{dx}=\zeta-\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}u+\cdots,$$

dass bei den Anfangsbedingungen $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, $u=0$, die Gleichung $u=0$ oder $y_n-\eta=0$ eine nothwendige Folge ist, also die Entwickelung $y_n-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ sich auf Null reducirt. (Vgl. S. 333.)

Um die particulären Curven zu erhalten, die auf der Fläche liegen, haben wir die erste der Gleichungen (8.), worin $y_2=\eta$, $z=\zeta$ zu setzen ist, zu integriren. Dieselbe lautet

$$\frac{dy_1}{dx}=\zeta-\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}(x^2+4y_1)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}$$

oder

$$\frac{d(x^2+4y_1)}{dx}=-2\sqrt{x^2+4y}.$$

Die Integration ergiebt

$\sqrt{x^2+4y_1}=-(x+2a)$, a eine willkürliche Constante,

woraus zur Darstellung der gesuchten Curvenschar die Gleichungen folgen*)

$$(10.)\quad\begin{cases} y_1=ax+a^2, \\ y_2=\frac{x^3}{12}+x(ax+a^2)-(ax+a^2)-\frac{1}{12}(x+2a)^3=-\left(a+\frac{a^2}{2}\right)x-\frac{2}{3}a^3-a^2. \end{cases}$$

*) ***Mayer***, a. a. O. S. 383.

Die vollständigen Lösungen des Systems (7.) lauten*)

$$(11.)\qquad \begin{cases} y_1 = c_1 x + c_2, \\ y_2 = -\left(c_1 + \frac{c_1^2}{2}\right)x + \frac{c_1^3}{3} - c_1 c_2 - c_2. \end{cases}$$

Die Curvenschar (10.), die auf der Fläche $\Delta = 0$ liegt, stellt aber, wie Herr *Mayer* bemerkt hat, in der That keine singulären, sondern particuläre Lösungen dar. Denn sie werden aus den vollständigen Lösungen (11.) erhalten, indem man zwischen den Constanten die Beziehung $C_2 = C_1^2$ eingeführt und $c_1 = a$ setzt. Die Curve auf der Fläche $\Delta = 0$, die die Ausnahmepunkte enthält, in denen $y_2 = \eta$ aufhört holomorph zu sein, wird wie oben angegeben, durch die Gleichung

$$x^2 + 4y_1 = 0$$

dargestellt. Der zugehörige Werth von y_2 wird

$$y_2 = \eta = \frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}.$$

Die Curve

$$y_1 = -\frac{x^2}{4}, \qquad y_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}$$

stellt eine Enveloppe der Curvenschar (10.) dar.**)

3. Beispiel.

Die Differentialgleichungen der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt sind von Herrn *Hess*†) auf die Form gebracht worden.

$$(12.)\qquad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 2P\sqrt{\nu\sigma - \varrho^2 + 2\lambda\mu\varrho - \lambda^2\sigma - \nu\mu^2} = 2P\sqrt{H}, \\ \frac{d\varrho}{dt} = \alpha(B-C)qr + \beta(C-A)rp + \gamma(A-B)pq = R, \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{\lambda\sigma - \mu\varrho}{\nu\sigma - \varrho^2}\cdot R + \frac{\sqrt{H}}{\nu\sigma - \varrho^2}[\sigma(2P\mu + h) - \varrho(\alpha p + \beta q + \gamma r)], \end{cases}$$

wo p, q, r, mit μ, ν, ϱ durch die Gleichungen verbunden sind

$$(13.)\qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2P\mu + h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu, \\ Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = \varrho \end{cases}$$

und P, h, A, B, C, α, β, γ, σ, λ Constante sind.

Definiren wir z durch die Gleichung

$$z^2 = H$$

*) *Mayer* a. a. O. S. 384.

**) Vgl. *Mayer* a. a. O. S. 383.

†) Math. Ann. XX p. 464. Vgl. *Mayer* a. a. O. S. 384.

und eliminiren aus (12.) dt, so lauten die zu integrirenden Gleichungen

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{d\varrho} = \dfrac{2Pz}{R}, \\ \dfrac{d\mu}{d\varrho} = \dfrac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\nu\sigma-\varrho^2} + \dfrac{R}{(\nu\sigma-\varrho^2)R}[\sigma(2P\mu+h)-\varrho(\alpha p+\beta q+\gamma r)], \\ z^2 = H. \end{cases}$$

Die Discriminante der Gleichung für z lautet

$$H = \nu\sigma-\varrho^2+2\lambda\mu\varrho-\lambda^2\sigma-\nu\mu^2 = 0,$$

woraus

$$\nu = \frac{\varrho^2-2\lambda\mu\varrho+\lambda^2\sigma}{\sigma-\mu^2} = \eta.$$

Die entsprechende Wurzel ζ von z ist

$$\zeta = 0.$$

Wir beweisen zunächst, dass $\nu = \eta$ ein Integral von (14.) ist. Hierzu muss

$$\frac{dv}{d\varrho} = \frac{\partial v}{\partial\varrho} + \frac{\partial v}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\varrho} = 0,$$

für $\nu = \eta$, $z = 0$ oder

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho} + \frac{\partial\eta}{\partial\mu}\frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\eta\sigma-\varrho^2} = 0$$

sein. Nun ist

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho} = \frac{2\varrho-2\lambda\mu}{\sigma-\mu^2}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial\mu} = -\frac{(2\varrho-2\lambda\mu)(\lambda\sigma-\mu\varrho)}{(\sigma-\mu^2)^2}, \qquad \frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\eta\sigma-\mu\varrho^2} = \frac{\sigma-\mu^2}{\lambda\sigma-\mu\varrho}$$

also

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho} + \frac{\partial\eta}{\partial\mu}\frac{\lambda\sigma-\varrho\mu}{\eta\sigma-\varrho^2} = 0$$

folglich $\nu = \eta$ ein Integral. Da $\frac{d\eta}{d\varrho} = 0$, so ist $\eta = \text{const.}$ und die entsprechende Schar der Integralcurven ist gegeben durch die Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} \nu = c, \\ \varrho^2-2\lambda\mu\varrho+\lambda^2\sigma = c(\sigma-\mu^2), \end{cases}$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

Um nun zu entscheiden, ob $\nu = \eta$ ein singuläres oder particuläres Integral ist, entwickeln wir zunächst z nach Potenzen von $\nu-\eta$. Man erhält

$$z = \sqrt{H} = \sqrt{\sigma-\mu^2}\,(\nu-\eta)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man nun

$$\nu = \eta+u^2, \qquad z = \sqrt{\sigma-\mu^2}\cdot u,$$

so geht die Gleichung

$$\frac{dv}{d\varrho} = \frac{2Pz}{R}$$

über in

$$2u\frac{du}{d\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\left\{\frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{(\eta+u^2)\sigma-\varrho^2}+\frac{\sqrt{\sigma-\mu^2}\cdot u}{(\eta+u^2)\sigma-\varrho^2}\frac{[\sigma(2P\mu+h)-\varrho(\alpha p+\beta q+\gamma r)]}{R}\right\}$$
$$=\frac{2P\sqrt{\sigma-\mu^2}\cdot u}{R}.$$

In Berücksichtigung, dass

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\eta\sigma-\varrho^2}=0,$$

folgt

$$\frac{d(\nu-\eta)}{d\varrho}=2u\frac{du}{d\varrho}=\frac{\sqrt{\sigma-\mu^2}}{R}\left[2P-\frac{1}{\eta\sigma-\varrho^2}(\sigma(2P\mu+h)-\varrho(\alpha p_0+\beta q_0+\gamma r_0))\right]u$$
$$+\text{ Glieder mit höheren Potenzen von } u,$$

wo p_0, q_0, r_0, ein System von Wurzeln der Gleichungen (13.) bedeuten, in denen auf der rechten Seite η statt ν zu setzen ist. Wenn nun nicht identisch der Ausdruck

$$(16.)\qquad 2P(\eta\sigma-\varrho^2)-\sigma(2P\mu+h)+\varrho(\alpha p_0+\beta q_0+\gamma r_0)=0$$

wird für jedes μ und ϱ, so verschwindet nicht der Coefficient von u. Die Entwickelung von $\frac{d(\nu-\eta)}{d\varrho}$ nach Potenzen von $\nu-\eta$ beginnt also dann mit $(\nu-\eta)^{\frac{1}{2}}$, was ein Kriterium dafür ist, dass $\nu=\eta$ ein singuläres Integral ist.

Vom Ausnahmefalle (16.) abgesehen, ist also $\nu=\eta$ ein singuläres Integral und die entsprechenden Lösungen (15.) sind also singulär. Herr *Hess* bezeichnete sie als particulär, Herr *Mayer* macht darauf aufmerksam, dass sie auch singulär sein könnten. Nach unserem Kriterium ist im allgemeinen das letztere der Fall. Auch in dem besonderen von Herrn *Hess* behandelten Falle, wo $\alpha=0$, $\beta=0$ also nach (13.) $r=r_0=\frac{\varrho}{C\gamma}$, $\sigma=\gamma$ ist, wird (16.) nicht identisch erfüllt, sind also die gefundenen Lösungen singulär.

GENERAL LIBRARY,
UNIV. OF MICH.
NOV 8 1900

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

von

L. Fuchs.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich Preussischer Behörden.

Band 122.

Heft IV.

Ausgegeben den 17. October.

Berlin,
W. 35 Lützowstrasse 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1900.

Jährlich circa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Louis Nebert's Verlag in Halle a. S., Poststr. 7.

Thomae, Prof. Dr. J., **Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complex. Veränderlichen. Zweite erweiterte Auflage.** gr. 4°. geheftet 9 Mark.

Enneper, Prof. Dr. A., **Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.** Akademische Vorträge. **Zweite Auflage.** Neu bearbeitet und herausgegeben von Prof. Dr. **Felix Müller.** Lex.-8 geh. 18 M.

Thomae, Prof. Dr. J., **Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.** gr. 8. geh. 6 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Abriss e. Theorie d. Funktionen e. complexen Veränderlichen u. der Thetafunktionen. Dritte,** erheblich vermehrte **Auflage.** gr. 4. geh. 10 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.** gr. 4. geh. 2 Mark 80 Pf.

Thomae, Prof. Dr. J., **Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Funktionen gebraucht werden.** gr. 4. geh. 3 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Funktionen.** 2 Teile. gr. 4. geh. 9 Mark.

Thomae, Prof. Dr. J., **Ueber eine Funktion, welche einer linearen Differential- u. Differenzen-Gleichung IV. Ordn. Genüge leistet.** gr. 4. geh. 1 Mark 50 Pf.

Repetitorium der analytischen Geometrie. gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Hofmann, Dr. F., **Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen.** Ein Uebungsbuch für den geometrischen Teil der Funktionentheorie. gr. 8. geh. 2 Mark.

Rulf, Prof. W., **Elemente der projektivischen Geometrie.** gr. 8. geh. 2 Mark 50 Pf.

Beau, Dr. O., **Analytische Untersuchungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourier'schen Integrale. Zweite** verb. u. verm. **Auflage.** gr. 4. geh. 5 Mark 50 Pf.

Odstrčil, Prof. Dr. J., **Kurze Anleitung zum Rechnen mit den (Hamilton'schen) Quaternionen.** gr. 8 geh. 2 Mark 25 Pf.

Hochheim, Prof. Dr. A., **Kâfî fîl Hisâb** (Genügendes über Arithmetik) **des Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî.** 3 Hefte. gr. 4. geh. 3 Mark 90 Pf.

Hochheim, Dr. A., **Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte.** gr. 8. geh. 3 Mark.

Hochheim, Dr. A., **Ueber Pole u. Polaren d. parabol. Curven III. Ordn.** gr. 4. geh. 1 Mark.

Langer, Dr. P., **Die Grundprobleme der Mechanik.** Eine kosmologische Skizze. gr. 8. geh. 1 Mark 80 Pf.

Frege, Dr. G., **Begriffsschrift.** Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. gr. 8. geh. 3 Mark.

Radicke, A., **Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.** gr. 8. geh. 1 Mark 20 Pf.

Schobloch, Dr. A., **Ueber Beta- und Gammafunktionen.** gr. 4. geh. 60 Pf.

Dronke, Dr. A., **Einleitung in die höhere Algebra.** gr. 8. geh. 4 Mark 50 Pf.

Günther, Prof. Dr., **Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Günther, Prof. Dr., **Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.** gr. 8. geh. 12 Mark.

Georg Reimer
Verlag

Berlin W. 35,
Lützowstrasse 107/8.

Kants gesammelte Schriften.

Herausgegeben
von der
Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Soeben erschien **Band XI**:

Kant's Briefwechsel
Band II.

Preis brosch. 10 Mark, in Halbfranz geb. 12 Mark.

Zuerst erschien vor Kurzem als erster der ganzen Reihe
Band X:

Kant's Briefwechsel
Band I.

Preis brosch. 10 Mark, in Halbfranz geb. 12 Mark.

Prospekte gratis und franko.

Georg Reimer
Verlag

Berlin W. 35
Lützowstr. 107/8.

Soeben erschien:

Novalis Schriften

Kritische Neuausgabe auf Grund des handschriftlichen Nachlasses

herausg. von ERNST HEILBORN

2 Theile in 3 Bänden

Preis brosch. M. 10.—
gebd. M. 12.—

Die neue Ausgabe bietet zum ersten Mal einen Text der Werke des Novalis, der den Anforderungen moderner Wissenschaft in jeder Weise entspricht. Sie giebt zum ersten Mal den wortgetreuen Text, von den überaus zahlreichen Fehlern und Entstellungen der bisherigen Ausgaben befreit; die »Hymnen an die Nacht« in der ursprünglichen, grösstentheils metrischen Fassung; das »Tagebuch« vollständig ohne Auslassungen; die »Fragmente« in ihrem ursprünglichen Zusammenhang.

Novalis der Romantiker

von ERNST HEILBORN

Preis brosch. M. 3.—
gebd. M. 4.—

Auf Grund reichhaltigen, bisher unveröffentlichten Quellen- und Briefmaterials ist diese neue Biographie des Novalis gestaltet. Dem psychologischen Interesse ist in erster Linie Rücksicht getragen. Gleichzeitig kennzeichnet der Verfasser in Novalis innerem Entwicklungsgang und in seiner Weltanschauung die Tendenzen der deutschen Romantik überhaupt.

Festschrift
Johannes Vahlen
zum siebenzigsten Geburtstag

gewidmet von

seinen Schülern.

Preis brosch. M. 24.—

Erläuterungen
der
Jugendgedichte Schillers

von

Fritz Jonas.

— Preis brosch. M. 2,40. —

Band 122. Heft IV.
Inhaltsverzeichniss.

Hancock, Harris. On the reduction of *Kronecker*'s modular systems whose elements are functions of two und three variables . . . . . Seite 265

Schafheitlin, Paul. Die Nullstellen der *Bessel*schen Functionen . . . . — 299

Hamburger, M. Ueber die singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit n abhängigen Variablen . . . . — 322

Sendungen von Beiträgen für das Journal erbittet die Redaction **ausschliesslich** unter der Adresse:

An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik, Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer. Berlin W. 35, Lützowstrasse 107/8.